

4. ÚLOHA

Opravovali: **Matúš Libák & Martinka Osuská**

Najkrajšie riešenia: **Pavol Gregor Ihnát & Oleg Boyko**

Počet riešení: **32**

ZADANIE

Alexander a Barbora hrajú hru, kde na papieri majú napísané čísla od 1 po 21, každé práve raz. Hráči sa striedajú a vždy si počas svojho ťahu vyberú dve čísla, ktoré zmažú, odčítajú menšie od väčšieho a výsledok napíšu na papier (ak sú čísla rovnaké, nové číslo je 0). Ak posledné číslo napísané na papieri je párne, vyhrá Alexander, ale ak je nepárne, vyhrá Barbora.

- Kto vyhrá, ak začína Alexander?
- Kto vyhrá, ak začína Barbora?

VZOROVÉ RIEŠENIE

To, či vyhrá Alexander alebo Barbora, závisí iba od toho, či posledné číslo na papieri bude párne, alebo nepárne. Preto si pred začiatkom hry všetky čísla rozdelíme do dvoch skupín, na párne a nepárne. Vidíme, že máme 10 párných a 11 nepárných čísel.

V každom ťahu môžu nastať tri situácie, podľa toho, či sme vybrali párne alebo nepárne čísla:

- Výber dvojice párne a párne:

Keď hráč zmaže dve párne čísla, ich rozdiel je vždy párne číslo. To znamená, že z papiera zmizli dve párne čísla a pribudlo jedno nové párne číslo. Počet nepárných čísel na papieri sa v tomto kroku ale vôbec nezmenil. Zároveň počet párných sa zmenšil o 1.

- Výber dvojice párne a nepárne:

Keď hráč zmaže jedno párne a jedno nepárne číslo, ich rozdiel je vždy nepárne číslo. Hráč síce jedno nepárne číslo odstránil, ale vzápätí namiesto neho napísal nové nepárne číslo. Počet nepárnych čísel na papieri teda zostáva rovnaký ako predtým. Počet párných sa zmenšil o 1.

- Výber dvojice nepárne a nepárne:

Keď hráč zmaže dve nepárne čísla, ich rozdiel je vždy párne číslo.

V tomto prípade hráč odstránil z papiera dve nepárne čísla naraz a nahradil ich jedným párnym číslom. Takže počet nepárnych čísel sa zmenšil o 2 a počet párných sa zväčšil o 1.

Vidíme, že sa môžu stať iba dva prípady. Prvý, pri ktorom sa počet párných čísel zmenší o 1 a druhý, kde sa počet párných zväčší o 1 a počet nepárnych sa zmenší o 2. Z týchto dvoch situácií vyplýva dôležitý záver: počet nepárnych čísel na papieri sa počas hry buď nemení, alebo klesá po dvoch. To znamená, že nepárne čísla nikdy nemôžu zmiznúť po jednom. Keďže na začiatku máme 11 nepárnych čísel, ich počet sa môže len postupne znižovať na 9, 7, 5, 3 a nakoniec na 1. V momente, keď na papieri zostane už iba jedno nepárne číslo, nemáme ho ako odstrániť, a teda nakoniec musí zostať ako posledné. Toto nemôže žiaden hráč svojím ťahom zmeniť, pretože nepárne čísla sa dajú zmazať len tak, že zmiznú dve naraz.

- a) Ak začína Alexander: Vyhrá Barbora, pretože posledné číslo bude nepárne.
- b) Ak začína Barbora: Vyhrá Barbora, pretože posledné číslo bude nepárne.

Bez ohľadu na to, kto začína alebo akú stratégiu si zvolí, víťazom je vždy Barbora. O výsledku rozhodlo to, že na začiatku bol na papieri nepárny počet nepárnych čísel.