

## 5. ÚLOHA

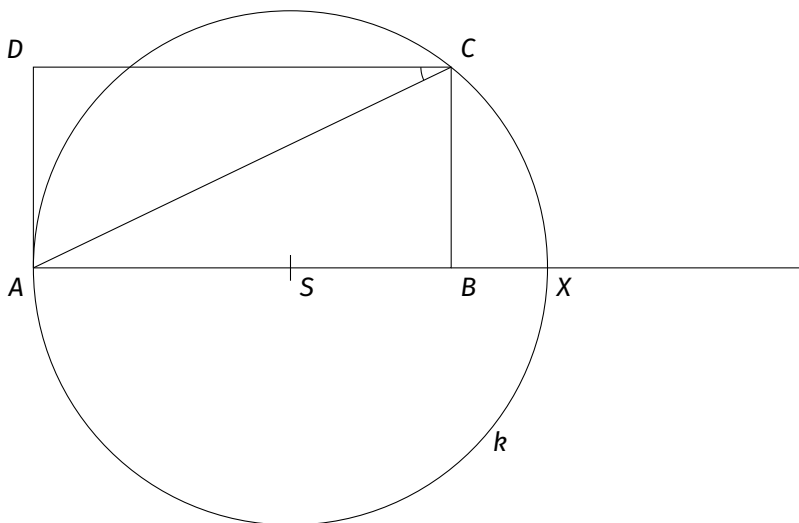
Opravovali: **Livka Lukáčová & Tomáš Sukeľ**

Najkrajšie riešenia: **Cyril Ihnát & Jakub Drobníak**

Počet riešení: **31**

### ZADANIE

V knihe sa píše, že symbol je v tvare obdĺžnika  $ABCD$ , v ktorom uhol  $\sphericalangle ACD$  má veľkosť  $30$  stupňov. Na strane  $AB$  vo vzdialenosti  $2$  od bodu  $A$  sa nachádza bod  $S$ , ktorý je stredom kružnice  $k$ , na ktorej ležia body  $A$  aj  $C$ . Ak predĺžime úsečku  $AB$ , pretne druhýkrát kružnicu  $k$  v bode  $X$ . Nájdite veľkosť úsečky  $BX$ . Úlohu neriešajte meraním ani rysovaním.



## VZOROVÉ RIEŠENIE

Vieme, že každý vnútorný uhol v obdĺžniku má veľkosť  $90^\circ$ . Takže keď uhol  $ACD$  má veľkosť  $30^\circ$ , tak uhol  $BCA$  musí mať veľkosť  $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ . Súčet vnútorných uhlov v trojuholníku je  $180^\circ$ . V trojuholníku  $ABC$  už poznáme veľkosti  $|\sphericalangle BCA| = 60^\circ$  a  $|\sphericalangle ABC| = 90^\circ$ . Takže dostávame  $|\sphericalangle CAB| = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ .

Body  $A$  a  $C$  ležia na kružnici  $k$ . Každý bod na kružnici má rovnakú vzdialenosť od jej stredu – táto vzdialenosť je rovná polomeru kružnice. Úsečky  $AS$  a  $SC$  preto majú rovnakú dĺžku, a to 2.

Keďže  $|AS| = |SC|$ , trojuholník  $ASC$  je rovnoramenný s ramenami  $AS$  a  $SC$ . Takže uhly  $CAS$  a  $SCA$  pri základni  $AC$  majú rovnakú veľkosť, a to  $30^\circ$ . Keď už poznáme veľkosti dvoch vnútorných uhlov trojuholníka  $ASC$ , tak vieme dopočítať aj tretí:  $|\sphericalangle ASC| = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$ . Uhly  $ASC$  a  $CSB$  spolu tvoria priamy uhol, takže musia dokopy mať  $180^\circ$ . Uhol  $CSB$  má teda veľkosť  $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

Úsečky  $SC$  a  $SX$  majú rovnakú dĺžku 2, keďže opäť ide o polomery kružnice  $k$ . Trojuholník  $SCX$  je teda rovnoramenný s ramenami  $SC$  a  $SX$ . V tomto trojuholníku vieme, že uhol  $CSX$  má veľkosť  $60^\circ$ . Zvyšné dva uhly majú teda dokopy  $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$  a zároveň majú rovnakú veľkosť, keďže ide o rovnoramenný trojuholník. Čiže uhly  $SCX$  a  $SXC$  majú oba  $120^\circ : 2 = 60^\circ$ .

V oboch trojuholníkoch  $SBC$  a  $XBC$  sa nachádza vnútorný uhol s veľkosťou  $60^\circ$  (uhly  $BSC$  a  $BXC$ ) a zároveň vnútorný uhol s veľkosťou  $90^\circ$  (uhly  $SBC$  a  $XBC$ ). Tým pádom budú mať tieto trojuholníky rovnako veľký tretí vnútorný uhol, ktorý bude mať veľkosť  $180^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 30^\circ$ . Navyše vieme, že tieto trojuholníky zdieľajú stranu  $BC$ . Keďže sme ukázali, že trojuholníky  $SBC$  a  $XBC$  majú rovnaké dva uhly a stranu nachádzajúcu sa medzi týmito uhlami, tieto trojuholníky budú zhodné podľa vety *usu*.

Keďže trojuholníky  $SBC$  a  $XBC$  sú zhodné, tak aj všetky dvojice ich strán majú rovnaké dĺžky. Konkrétne to znamená, že strany  $SB$  a  $BX$  budú mať tiež rovnakú dĺžku. Spolu tieto dve úsečky vytvárajú úsečku  $SX$ , o ktorej vieme, že má dĺžku 2. Úsečka  $BX$  má teda dĺžku rovnú polovici dĺžky  $SX$ , čiže 1.

