

## 6. ÚLOHA

Opravovali: **Katka Farbulová & Erik Novák**

Najkrajšie riešenie: **Oleg Boyko**

Počet riešení: **31**

### ZADANIE

Alexander má vo svojich dvoch vreckách niekoľko cukríkov, pričom v každom má aspoň 1, no menej ako 10. Kráľovná vidí, že v pravom vrecku má viac cukríkov ako v ľavom. Kráľovná si môže vždy tipnúť buď koľko cukríkov má Alexander vo vreckách dokopy, alebo aký je rozdiel počtu cukríkov v pravom a v ľavom vrecku. Alexander jej nechce klamať, tak vždy pravdivo odpovie áno alebo nie na jej tip. Koľko najmenej tipov bude kráľovnej stačiť na to, aby zistila koľko cukríkov má Alexander v ktorom vrecku bez ohľadu na to, koľko ich tam má?

### VZOROVÉ RIEŠENIE

Keďže v pravom vrecku je viac cukríkov ako v ľavom a zároveň oba počty cukríkov sú v rozmedzí 1 – 9, v ľavom vrecku môže byť najviac 8 cukríkov (ak by v ňom bolo 9, nemohlo by v pravom byť viac) a v pravom sú najmenej 2 cukríky.

Zároveň si všimnime, že najmenší možný súčet je 3 (keď má v ľavom 1 cukrík a v pravom 2) a najväčší možný je 17 (v ľavom 8, v pravom 9). Podobne môžeme prísť na to, že rozdiel sa môže pohybovať iba v rozmedzí 1 – 8.

S týmito informáciami si môžeme vytvoriť tabuľku, kde riadky sú jednotlivé možné súčty počtov cukríkov a stĺpce sú jednotlivé možné rozdiely. V každom políčku tabuľky sa nachádza jedna z týchto dvoch možností:

- Dvojica čísel: počet cukríkov v ľavom vrecku a počet cukríkov v pravom.
- Znak –, ak sa daná kombinácia súčtu a rozdielu dosiahnuť nedá.

Napr. pre rozdiel 8 existuje iba možnosť, že má Alexander v ľavom vrecku 1 cukrík a v pravom 9, teda možnosť s iným súčtom ako 10 neexistuje, teda v políčkach pre rozdiel 8 a súčet iný ako 10 sa nachádza znak -.

	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>
<b>3</b>	1,2	-	-	-	-	-	-	-
<b>4</b>	-	1,3	-	-	-	-	-	-
<b>5</b>	2,3	-	1,4	-	-	-	-	-
<b>6</b>	-	2,4	-	1,5	-	-	-	-
<b>7</b>	3,4	-	2,5	-	1,6	-	-	-
<b>8</b>	-	3,5	-	2,6	-	1,7	-	-
<b>9</b>	4,5	-	3,6	-	2,7	-	1,8	-
<b>10</b>	-	4,6	-	3,7	-	2,8	-	1,9
<b>11</b>	5,6	-	4,7	-	3,8	-	2,9	-
<b>12</b>	-	5,7	-	4,8	-	3,9	-	-
<b>13</b>	6,7	-	5,8	-	4,9	-	-	-
<b>14</b>	-	6,8	-	5,9	-	-	-	-
<b>15</b>	7,8	-	6,9	-	-	-	-	-
<b>16</b>	-	7,9	-	-	-	-	-	-
<b>17</b>	8,9	-	-	-	-	-	-	-

*(Pre zvedavých a/alebo nadšených: Môžete si všimnúť, že na klesajúcich diagonálach sa nemenia počty cukríkov v ľavom vrecku a na rastúcich sa nemenia počty cukríkov v tom pravom!)*

Pri hádaní kráľovná v podstate iba vymazáva z tabuľky riadky alebo stĺpce, až dokým jej neostane jedna jediná nevymazaná možnosť.

Ak sa kráľovná pýta na rozdiel a dostane odpoveď „Nie.“, vymaže príslušný stĺpec. Ak dostane odpoveď „Áno.“, vymaže všetky stĺpce okrem príslušného. Nuž a rovnako to funguje pre pýtanie sa na súčet, ale s riadkami namiesto stĺpcov.

Najprv ukážme, ako kráľovná vie zaručene uhádnuť konkrétne políčko tabuľky na najviac 8 otázok.

Kráľovná sa bude pýtať na rozdiely od najmenšieho, teda na stĺpce zľava tabuľky. V momente, kedy dostane odpoveď „Áno.“, bude sa pýtať na súčty od najmenšieho, teda z vrchu tabuľky na tie riadky, v ktorých je nejaká dvojica čísel.

Ak by dostala odpoveď „Áno.“ hneď pri prvom stĺpci, v ktorom je 8 možností, potrebuje ešte najviac 7 otázok na to, aby jej ostala iba jedna nevyškrtnutá možnosť. Dokopy teda potrebuje najviac 8 otázok.

Všimnime si, že v každom stĺpci je o jednu možnosť menej, než v stĺpci od neho naľavo. Pre rozdiel 1 existuje 8 rôznych možností, pre rozdiel 2 už len 7 možností, pre rozdiel 3 iba 6 a tak ďalej. S každým vyškrtnutým stĺpcom kvôli odpovedi „Nie.“ na otázku o rozdieli tak potrebuje kráľovná o otázku menej na zistenie súčtu, teda riadku. Z toho vyplýva, že počet otázok potrebných na nájdenie správneho riadku a stĺpca sa nemení a je to stále  $1 + 7 = 2 + 6 = \dots = 7 + 1 = 8$ .

Ukážme si to na príklade.

1. **Kráľovná:** „Je rozdiel 1?“ **Alexander:** „Nie.“

*Kráľovná vyškrtla prvý stĺpec.*

2. **K:** „Je rozdiel 2?“ **A:** „Nie.“

*Kráľovná vyškrtla druhý stĺpec.*

3. **K:** „Je rozdiel 3?“ **A:** „Áno.“

*Kráľovná vyškrtla všetky stĺpce okrem tretieho.*

4. **K:** „Je súčet 5?“ **A:** „Nie.“

*Kráľovná vyškrtla tretí riadok.*

5. **K:** „Je súčet 7?“ **A:** „Nie.“

*Kráľovná vyškrtla piaty riadok.*

6. **K:** „Je súčet 9?“ **A:** „Nie.“

*Kráľovná vyškrtla siedmy riadok.*

7. **K:** „Je súčet 11?“ **A:** „Nie.“

*Kráľovná vyškrtla deviaty riadok.*

8. **K:** „Je súčet 13?“ **A:** „Nie.“

*Kráľovná vyškrtla jedenásty riadok a teda jej ostala jediná možnosť.*

**K:** „Teraz už viem, že máš v ľavom vrecku 6 a v pravom 9!“

Počas kráľovninho hádania vznikla takto vyškrtaná tabuľka:

	1	2	3	4	5	6	7	8
<b>3</b>	1,2	-	-	-	-	-	-	-
<b>4</b>	1	2,3	-	3	3	3	3	3
<b>5</b>	4	2,3	1,4	-	-	-	-	-
<b>6</b>	-	2,4	-	1,5	-	-	-	-
<b>7</b>	5	3,4	2,5	1,6	-	-	-	-
<b>8</b>	-	3,5	-	2,6	-	1,7	-	-
<b>9</b>	6	4,5	3,6	2,7	1,8	-	-	-
<b>10</b>	-	4,6	-	3,7	-	2,8	-	1,9
<b>11</b>	7	5,6	4,7	3,8	2,9	-	-	-
<b>12</b>	-	5,7	-	4,8	-	3,9	-	-
<b>13</b>	8	6,7	5,8	4,9	-	-	-	-
<b>14</b>	-	6,8	-	5,9	-	-	-	-
<b>15</b>	7,8	-	6,9	-	-	-	-	-
<b>16</b>	-	7,9	-	-	-	-	-	-
<b>17</b>	8,9	-	-	-	-	-	-	-

Červené čísla označujú poradie otázky, v ktorom kráľovná daný riadok alebo stĺpec vyškrtla.

Myslíme na to, že v príklade kráľovná uhádla možnosť na práve 8 otázok, no mohlo jej stačiť aj menej. Napríklad, ak by Alexander mal v ľavom vrecku 1 cukrík a v pravom 4, uhádla by to už po štvrtej otázke.

Keď vieme, že kráľovná vždy s istotou uhádne počty cukríkov na najviac 8 otázok, stačí povedať, prečo to na najviac 7 otázok spraviť nevie. Vymyslíme jednoduchý protipríklad. Predstavme si, že správne počty cukríkov sú v prvom stĺpci, teda majú rozdiel 1 (ale kráľovná o tom, samozrejme, ešte nevie). Sú dve možnosti – buď sa kráľovná niekedy opýta Alexandra na rozdiel, alebo nie.

Ak sa kráľovná nikdy neopýta na rozdiel, tak sa jej môže stať, že dostane 7-krát odpoveď „Nie.“, teda bude mať z 15-riadkovej tabuľky vyškrtnutých iba 7 riadkov, pričom ani nevie, v ktorom stĺpci sa správna možnosť nachádza. To zjavne nestačí na to, aby vedela, ktorá možnosť je správna.

Ak sa kráľovná počas svojho hádania opýta na rozdiel, najlepšie, čo sa jej môže stať, je, že sa opýta na prvý, a teda dostane hneď odpoveď „Áno.“. Od tohto momentu nemá zmysel sa pýtať na rozdiel a my už vieme, že potrebuje najviac 7 otázok na zistenie súčtu, no ostáva jej už iba najviac 6.

Našli sme spôsob, akým vie kráľovná vždy uhádnuť počty cukríkov na najviac 8 otázok a ukázali sme, že 7 jej nestačí.

## **KOMENTÁR**

Mnohí z vás ste zvládli prísť na správny postup, ako má kráľovná klásť otázky, aby zistila počty cukríkov do ôsmich otázok, čo sme radi.

Nám je jasné, že vám počas písania bolo jasné, že to je najmenej, a mali ste intuitívnu predstavu, prečo. Je potrebné ale mať do budúca na pamäti, že v úlohách, ktoré sa pýtajú na najmenší/najväčší počet niečoho, je nutné aj ukázať, prečo to nejde na menej/viac.

Často najjednoduchší spôsob, ako také niečo dokázať, je od správnej odpovede odčítať/pričítať 1 a ukázať, čo sa zrazu pokazí, na konkrétnom prí-

klade. Na ukávanie, že niečo neplatí vždy, totižto stačí jeden jediný protipríklad, ktorý sa väčšinou hľadá pomerne ľahko.

Veríme, že kým budete na toto myslieť, v budúcnosti takéto príklady už zvládnete ľavou zadnou na 9 bodov!