6. ÚLOHA

Opravovali: **Matúš Libák** & **Richard Semanišin**

Najkrajšie riešenie: **Oleg Boyko**

Počet riešení: **48**

ZADANIE

Bianka a kúzelník sa striedajú v kreslení na nekonečný papier, pričom každý bude kresliť štyrikrát. Bianka kreslí priamky a kúzelník kružnice. **Žiadne dve nakreslené priamky alebo kružnice nesmú byť totožné (teda také, že každý bod jednej z nich patrí aj tej druhej)**. Kúzelník chce, aby na konci bolo čo najmenej bodov prieniku. Bianka chce, aby na konci bolo čo najviac bodov prieniku. Koľko najviac bodov prieniku môže na konci byť na papieri, ak obaja hrajú najlepšie ako môžu a

a. začína Bianka,

b. začína kúzelník?

Pozor: 11.10. sme do zadania pridali upresnenie hrubým písmom.

VZOROVÉ RIEŠENIE

Biankin cieľ mať čo najviac priesečníkov znamená, že sa v každom svojom ťahu bude snažiť ich urobiť čo najviac. Podobne, kúzelník ich chce spraviť čo najmenej.

Vieme, že dve priamky majú najviac jeden prienik, a to ak sú rôznobežné. Zároveň kružnica s priamkou majú najviac 2 prieniky. Kúzelník nikdy nechce pretínať kružnicu kružnicou (tým by len pridal prieniky, čo je proti jeho stratégii) a týmto prípadom sa teda zaoberať nemusíme.

Keďže papier je nekonečný, kúzelník vie vždy kružnicu dať tak, aby nepretla žiadnu inú kružnicu ani priamku. Vie to spraviť napríklad tak, že si nájde dve priamky, medzi ktorými už nie je iná priamka, a dá kružnicu medzi ne. V tejto

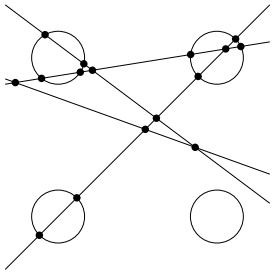
oblasti nebola žiadna priamka, a teda žiadna nepretína kružnicu. Kúzelník vie dať kružnicu dosť ďaleko od priesečníka priamok. Potom tam už určite nebude žiadna ďalšia kružnica. To je preto, že na papieri je kružníc vždy iba konečne veľa a priestor medzi priamkami je nekonečný. Takú kružnicu teda nakresliť vie.

a.

1. Bianka nakreslí priamku hocikde v priestore.
2. Kúzelník nakreslí kružnicu tak, aby nepretla priamku na papieri.
3. Bianka chce priamkou pretnúť kružicu aj priamku. To sa dá. Ak si Bianka zvolí ľubovoľný bod na papieri, je cez neho možné potiahnuť nekonečne veľa priamok pretínajúcich kružnicu. Rovnobežka s priamkou na papieri cez tento bod je len 1, čo je menej ako nekonečný počet. Z nekonečne veľa priamok pretínajúcich priamku aj kružnicu si potom vie Bianka vybrať takú, ktorá je s priamkou na papieri rôznobežná. Vzniknú teda najviac 3 prieniky (1 s priamkou a 2 s kružnicou).
4. Kúzelník umiestni kružnicu tak, aby nepretla žiadnu priamku ani kružnicu.
5. Bianka teraz pretne priamkou obe kružnice a zároveň všetky priamky. To sa dá. Cez stred jednej kružnice na papieri sa dá totiž viesť nekonečne veľa priamok pretínajúcich obe kružnice. Každá priamka vedená cez tento stred pretne tú kružnicu, ktorej stredom prechádza. Druhá kružnica sa dá preťať nekonečne veľa priamkami. Bianka má však na papieri len 2 priamky, s ktorými by mohla nová priamka byť rovnobežná, a teda ich nepretnúť. Keďže vyberá z nekonečného počtu priamok, tak vie nájsť takú priamku, že vznikne 6 prienikov, a to 2 s priamkami a 4 s kružnicami.
6. Kúzelník znovu vie spraviť kružnicu, ktorá nepretne nič. Umiestni ju však tak, aby sa nedali priamkou preťať všetky 3 kružnice. To vie spraviť napríklad tak, že by kružnice ukladal do rôznych rohov nejakého štvorca a boli by rovnako veľké (v takom prípade si vieme všimnúť, že sa nedajú pretnúť jednou priamkou).

7. Bianka teda znovu pretne najviac dve kružnice a všetky 3 priamky. To je 7 prienikov.
8. Kúzelník dá kružnicu tak, aby nič nepretla.

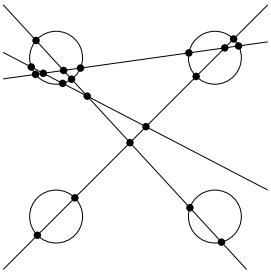
Dokopy teda mohlo vzniknúť najviac $3 + 6 + 7 = 16$ prienikov. Ešte je potrebné ukázať, že takýto prípad skutočne mohol nastať, ako vidno na obrázku.



b.

1. Kúzelník nakreslí kružnicu hocikde v priestore.
2. Bianka pretne kružnicu priamkou. Získa teda najviac 2 prieniky.
3. Kúzelník nakreslí kružnicu tak, aby nič nepretla.
4. Bianka pretne priamkou obe kružnice aj priamku, čo už vieme, že sa dá. Tým získa najviac 5 prienikov.
5. Kúzelník umiestni kružnicu tak, aby nič nepretla a nedala sa pretnúť tou istou priamkou ako zvyšné 2. To už vieme, že sa dá.
6. Bianka pretne najviac 2 kružnice a obe priamky. Tým vznikne najviac 6 prienikov.
7. Kúzelník umiestni kružnicu tak, aby nebola na žiadnej priamke s hocikorými inými dvoma kružnicami (napr. ju dá do štvrtého rohu štvorca).
8. Bianka pretne najviac 2 kružnice a všetky 3 priamky. Vznikne najviac 7 prienikov.

Dokopy teda mohlo vzniknúť najviac $2 + 5 + 6 + 7 = 20$ prienikov. Ešte je potrebné ukázať, že takýto prípad skutočne mohol nastať, ako vidno na obrázku.



KOMENTÁR

V tejto úlohe bolo hneď niekoľko nástrah. Azda najväčšou bolo zdôvodnenie toho, že Bianka vie vždy nakresliť priamku, ktorá pretne všetky ostatné priamky a 2 kružnice. Ďalšou nástrahou bolo dokázanie toho, že kúzelník vie vždy zabezpečiť, že Bianka nepretne 3 kružnice. V takýchto úlohách nestačí iba ukázať rozmiestnenie, pre ktoré obe tvrdenia platia.