3. ÚLOHA

Opravovali: **Erik Novák** & **Filip Feher**

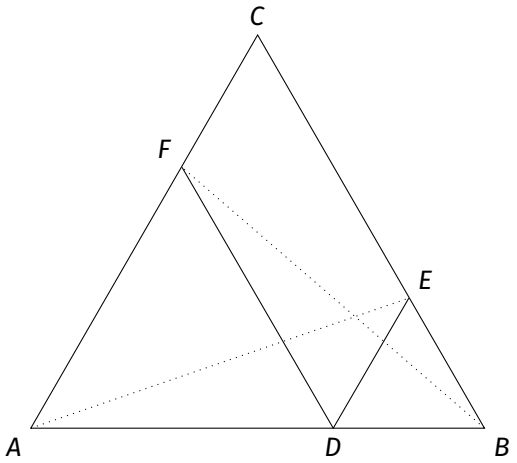
Najkrajšie riešenia: **Andrej Mišuth** & **Paulína Pokorná**

Počet riešení: **66**

ZADANIE

Vedľa hlavnej cesty v Medzilaborciach zahliadol pán Cestovateľ obraz Andyho Warhola, ktorý bol tvaru rovnostranného trojuholníka ABC. Na jeho stranách AB, BC a CA sú zvolené body D, E a F (v tomto poradí) tak, aby $DE \parallel AC$ a $DF \parallel BC$. Nájdite menší uhol medzi priamkami AE a BF.

VZOROVÉ RIEŠENIE



Všetky vnútorné uhly trojuholníka ABC majú 60°, pretože je zo zadania rovnostranný. Úsečka BC je zo zadania rovnobežná s úsečkou DF, teda $\sphericalangle ACB$ a $\sphericalangle AFD$ sú súhlasné a platí: $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle AFD| = 60°$ a $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ADF| = 60°$. Úsečka CA je zo zadania rovnobežná s úsečkou DE, teda $\sphericalangle BCA$ a $\sphericalangle BED$ sú súhlasné a platí: $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle BED| = 60°$ a $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle BDE| = 60°$. Trojuholníky

DBE a AFD majú všetky uhly 60°, teda sú rovnostranné a platí: $|DB| = |BE| = |DE|$ a $|AD| = |DF| = |FA|$.

Keďže susedné uhly na priamke majú súčet 180° a vieme, že $\sphericalangle ADF$ má veľkosť 60°, $\sphericalangle FDB$ bude mať veľkosť $180° - |\sphericalangle ADF| = 180° - 60° = 120°$. Taktiež keďže $\sphericalangle BDE$ má veľkosť 60°, $\sphericalangle ADE$ bude mať veľkosť $180° - |\sphericalangle BDE| = 180° - 60° = 120°$.

Trojuholníky DBF a DEA sú zhodné podľa vety *sus*, pretože $|\sphericalangle FDB| = |\sphericalangle ADE| = 120°$, $|DF| = |AD|$ a $|DB| = |DE|$. Kvôli zhodnosti vieme, že $|\sphericalangle AED| = |\sphericalangle ABF|$. Dopočítame tretí uhol EAD v trojuholníku ADE:

$$|\sphericalangle EAD| = 180° - (120° + |\sphericalangle AED|)$$
$$|\sphericalangle EAD| = 60° - |\sphericalangle AED|$$

Nazvime si bod priesečníku úsečiek AE a BF ako bod P. Dopočítame tretí uhol APB v trojuholníku ABP:

$$|\sphericalangle APB| = 180° - ((60° - |\sphericalangle AED|) + |\sphericalangle ABF|)$$

My už vieme, že $\sphericalangle AED$ a $\sphericalangle ABF$ sú rovnako veľké, teda vieme do rovnice namiesto $\sphericalangle ABF$ dosadiť $\sphericalangle AED$.

$$|\sphericalangle APB| = 180° - ((60° - |\sphericalangle AED|) + |\sphericalangle AED|)$$
$$|\sphericalangle APB| = 120°$$

Uhly APB a BPE sú susedné. Preto $\sphericalangle BPE$ bude mať veľkosť $180° - |\sphericalangle APB| = 180° - 120° = 60°$. Keďže BPE je menší uhol medzi priamkami AE a BF, úloha je vyriešená.

KOMENTÁR

Všimli sme si, že veľa z vás umiestnilo bod D do stredu strany AB a potom ste vypočítali hľadaný uhol pomocou vlastností, ktoré platia iba v tejto možnosti polohy D.
Bod D však môže byť kdekoľvek na strane AB a bolo potrebné dokázať, že uhol 60° bude medzi priamkami AE a BF vždy.
Niektorí ste síce zmienili, že bod D nemusí byť v strede, ale vyvodili ste, že hľadaný uhol je 60° na základe vlastností, ktoré platia, iba ak tam je. Skúste

nabudúce riešiť úlohu všeobecne pre akúkoľvek pozíciu *D*.
Do budúcna je teda odpichnutie sa od konkrétneho prípadu dobrý začiatok, no určite nie celým riešením úlohy. Pri tom vám môžu pomôcť všeobecné vlastnosti, ako sú napríklad podobnosti trojuholníkov či zhodnosti uhlov.