4. ÚLOHA

Opravovali: **Ala Bálintová** & **Kalista Semancová**

Najkrajšie riešenia: **Elena Mikušová** & **Kristián Nathaniel Lopušek**

Počet riešení: **75**

ZADANIE

Pýcha Giraltoviec – barokový kaštieľ – pána Cestovateľa natoľko zaujala, že chcel zistiť, koľko má rokov. Richtár mu o jeho veku povedal:

- dá sa zapísať ako súčet 3 po sebe idúcich kladných celých čísel,
- dá sa zapísať ako súčet 4 po sebe idúcich kladných celých čísel,
- dá sa zapísať ako súčet 6 po sebe idúcich kladných celých čísel,
- nie je deliteľný 3,
- je deliteľný 6.

Koľko najviac z týchto výrokov môže byť naraz pravdivých? A koľko rokov má barokový kaštieľ, ak jeho vek je najmenšie číslo také, že spĺňa najväčší možný počet pravdivých výrokov?

VZOROVÉ RIEŠENIE

Druhé tvrdenie hovorí, že číslo sa dá zapísať ako súčet 4 po sebe idúcich kladných celých čísel. Zo štyroch po sebe idúcich čísel sú vždy práve dve párne a dve nepárne, ich súčet bude párny.

Tretie tvrdenie hovorí, že číslo sa dá zapísať ako súčet 6 po sebe idúcich kladných celých čísel. Zo šiestich po sebe idúcich čísel je tiež párne každé druhé, dokopy sú to teda tri párne a tri nepárne čísla, ich súčet bude nepárny.

Keďže číslo nemôže byť zároveň párne aj nepárne, pravdivé môže byť najviac jedno z druhého a tretieho tvrdenia.

Štvrté tvrdenie hovorí, že vek nie je deliteľný 3, teda nemôže byť deliteľný ani 6, pretože $6 = 2 \cdot 3$. To znamená, že naraz môže byť pravdivé najviac jedno zo štvrtého a piateho tvrdenia.

Dokopy teda môžu byť pravdivé najviac 3 tvrdenia, a to: prvé tvrdenie, jedno z druhého a tretieho tvrdenia, jedno zo štvrtého a piateho tvrdenia. Poďme sa pozrieť na to, ktoré by to mohli byť.

Prvé tvrdenie hovorí, že číslo sa dá zapísať ako súčet 3 po sebe idúcich kladných celých čísel, teda ako $(x - 1) + x + (x + 1) = 3x$, kde x je prostredné z troch čísel. Keďže x je celé číslo, číslo $3x$ je deliteľné tromi.

Ak je toto tvrdenie pravdivé, štvrté tvrdenie (vek je nedeliteľný 3) musí byť nepravdivé. Ak má byť pravdivé jedno zo štvrtého a piateho tvrdenia, musí to byť piate tvrdenie, teda hľadaný vek je deliteľný 6, čiže bude párny. To vylučuje tretie tvrdenie, ktoré spĺňajú len nepárne čísla. Ak má byť pravdivé jedno z druhého a tretieho tvrdenia, musí to byť druhé.

Takto sme dostali, že jediné tri tvrdenia, ktoré môžu byť naraz pravdivé, sú prvé, druhé a piate tvrdenie. Ostáva už len nájsť najmenšie číslo, ktoré ich spĺňa.

Vieme, že vek kaštieľa je deliteľný 6, môžeme sa teda postupne pozrieť na násobky 6 a zistiť, ktoré číslo spĺňa aj ostatné podmienky.

0: Toto číslo určite nie je súčtom 4 po sebe idúcich kladných celých čísel.

6: Najmenšie číslo, ktoré je súčtom 4 po sebe idúcich čísel je $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, to je ale viac ako 6, takže toto nemôže byť vek kaštieľa.

12: Ďalšie číslo, ktoré sa dá zapísať ako súčet 4 po sebe idúcich čísel je $2 + 3 + 4 + 5 = 14$. Keďže 12 je viac ako 10, ale menej ako 14, ani 12 sa nedá zapísať ako súčet 4 po sebe idúcich čísel.

18: Toto číslo sa dá zapísať ako $5 + 6 + 7$, teda súčet 3 po sebe idúcich čísel (prvé tvrdenie) aj ako $3 + 4 + 5 + 6$, čo je súčet 4 po sebe idúcich čísel. Je to teda najmenšie číslo, ktoré spĺňa najviac tvrdení, a to prvé, druhé a piate.

KOMENTÁR

Úlohu sa väčšine z vás podarilo vyriešiť, často však v riešeniach chýbalo vysvetlenie, prečo odvodené vlastnosti z tvrdení musia byť vždy pravda. Aj

keď sa niektoré tvrdenia môžu zdať očividné, treba napísať, prečo sú pravdivé.

Niektorí z vás riešili úlohu v opačnom poradí (najprv našli 18 a potom povedali, že platia 3 tvrdenia) a veľakrát neodôvodnili dostatočne, prečo musia byť pravdivé najviac 3 tvrdenia. Nás zaujímalo, koľko je najviac tvrdení a až potom, ktoré najmenšie číslo spĺňa daný počet.