6. ÚLOHA

Opravovali: **Evička Krajčiová** & **Rišo Vodička**

Najkrajšie riešenie: **Ivana Kiselá**

Počet riešení: **51**

ZADANIE

V Klokočove pri Zemplínskej Šírave si pán Cestovateľ nakreslil do piesku konvexný štvoruholník $ABCD$, v ktorom platí $|AB| = |BC| = |CD|$. Ďalej si označil stredy strán AB, BC a CD postupne M, N a O. Po búrke mu však ostali nakreslené už iba body M, N a O. Popíšte spôsob, akým vie pán Cestovateľ nakresliť späť pôvodný štvoruholník $ABCD$, ak má k dispozícii len pravítko bez mierky a rysky a kružidlo.

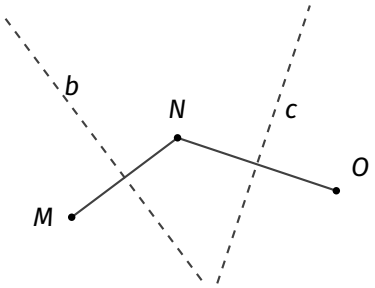
VZOROVÉ RIEŠENIE

Na to, aby sme vedeli, ako pôvodný štvoruholník $ABCD$ skonštruovať, sa najprv potrebujeme pozrieť na to, čo pre jeho body A, B, C, D platí. Predpokladajme teda, že máme zostrojený pôvodný štvoruholník $ABCD$.

Keďže AB, BC a CD sú rovnako dlhé a M, N, O sú postupne ich stredmi, tak aj ich polovice AM, BM, BN, CN, CO a DO majú rovnakú dĺžku.

Keďže BM a BN majú rovnakú dĺžku, tak vieme povedať, že sa B nachádza rovnako ďaleko od M ako od N. To znamená (keďže M a N nie je ten istý bod, lebo sú to stredy dvoch rôznych strán), že B musí ležať na osi úsečky MN. Tú si označme b.

Podobne, nakoľko $|CN| = |CO|$, bod C musí ležať na osi úsečky NO. Tú si označme c.



Pozrime sa teraz na to, čo znamená, že N je stredom úsečky BC. Túto vlastnosť vieme vyjadriť aj tak, že bod B je obrazom bodu C v stredovej súmernosti so stredom v bode N. Keďže B leží na b, tak obraz bodu B (teda bod C) musí ležať na obraze priamky b v tejto stredovej súmernosti. Označme túto priamku b'.

Vieme, že bod C leží na c aj na b'. Uvedomme si, že priamky c a b' sa musia preťať. Ak by sa nepreťali, tak by boli rovnobežné, a preto by boli rovnobežné aj priamky c a b. To by znamenalo, že body M, N a O ležia na jednej priamke, a to nastať nemôže.

Z toho nám už vyplýva konštrukcia:

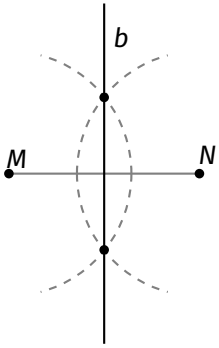
1. Skonštruujme b – os úsečky MN.

   Os úsečky MN je priamka, na ktorej ležia všetky body, ktoré sú vzdialené rovnako od M ako od N.

   Keďže je priamka jasne určená dvoma bodmi, na skonštruovanie takejto priamky nám stačí nájsť dva ľubovoľné body rovnako vzdialené od M ako od N. Skonštruujme teda dva takéto body.

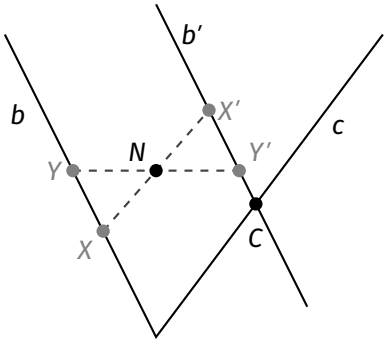
   Nakoľko pravítko nemá mierku, rovnakú veľkosť zaručme kružidlom. Do kružidla naberme nejakú vzdialenosť a urobme rovnako veľké kružnice z bodov M a N. Vzdialenosť zvoľme väčšiu ako polovicu úsečky MN, aby sa naše dve kružnice pretli dvakrát.

   Body, v ktorých sa pretnú, sú rovnako vzdialené od M ako od N, a teda nimi vedená priamka je b.

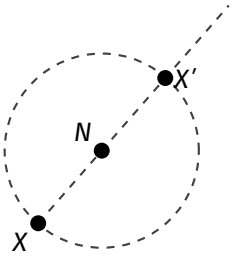


2. Priamku c, teda os úsečky NO, skonštruujeme podobne ako priamku b.
3. Skonštruujeme priamku b' ako obraz priamky b v stredovej súmernosti podľa bodu N.

   Keďže je priamka jasne určená dvoma bodmi, na skonštruovanie takejto priamky nám stačí nájsť obrazy dvoch ľubovoľných bodov X a Y ležiacich na priamke b v stredovej súmernosti podľa bodu N.



   Prenesme teda bod X na bod X'. Keďže bod N je rovnako vzdialený od X ako od jeho obrazu X', tak X' musí ležať na kružnici so stredom v N, ktorá prechádza X. Zároveň X musí ležať na priamke XN. Teda X' musí byť priesečníkom tejto kružnice a XN rôzny od X.



Podobne skonštruujme aj Y'.

4. Označme priesečník c a b' ako C
5. Skonštruujeme bod B ako obraz bodu C v stredovej súmernosti podľa bodu N, podobne ako predošlé stredové súmernosti.
6. Skonštruujeme bod A ako obraz stredovej súmernosti bodu B podľa M.
7. Skonštruujeme bod D ako obraz stredovej súmernosti bodu C podľa O.
8. Máme hotový štvoruholník $ABCD$.

KOMENTÁR

Veľa z vás našlo správny spôsob, akým pán Cestovateľ vedel naspäť narysovať pôvodný štvoruholník, čo nás veľmi teší. Čo však mnohým riešeniam chýbalo, je dôkaz, prečo vami popísaný postup naozaj funguje. Pri geometrických konštrukčných úlohách je práve tento dôkaz tou podstatnejšou časťou a je dobré na to do budúcna myslieť.