

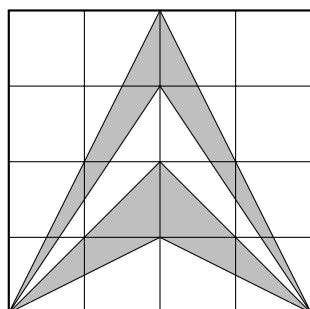


Košický Matboj

Košice, 24. 10. 2025

1. časť

Úloha 1.1: Určte súčet obsahov vyfarbených plôch vo štvorčkovej sieti, ak obsah jedného štvorčeka je 1.



Výsledok: 4

Riešenie: Najprv od obsahu doplneného väčšieho sivého trojuholníka (s dĺžkou základne 4 a výškou dlhou 4) odrátame obsah doplneného väčšieho bieleho trojuholníka (s dĺžkou základne 4 a výškou dlhou 3). Teda:

$$8 - 6 = 2$$

Takto sme získali obsah vyššej sivej časti. Rovnako odrátame od obsahu doplneného menšieho sivého trojuholníka (s dĺžkou základne 4 a výškou dlhou 2) obsah doplneného menšieho bieleho trojuholníka (s dĺžkou základne 4 a výškou dlhou 1). Teda:

$$4 - 2 = 2$$

Teraz už poznáme obsahy oboch sivých častí, takže nám ich stačí sčítať:

$$2 + 2 = 4$$

Úloha 1.2: Súčet dvoch kladných čísel je 5-krát väčší ako ich rozdiel. Aký je pomer väčšieho čísla k menšiemu?

Výsledok: 3 : 2

Riešenie: Označme si väčšie číslo ako a a menšie číslo ako b , pričom platí $a > b > 0$. Podľa zadania má byť súčet týchto čísel päťkrát väčší ako ich rozdiel, teda:

$$a + b = 5(a - b)$$

Pokračujme v úpravách:

$$\begin{aligned} a + b &= 5a - 5b \\ a + b - 5a + 5b &= 0 \\ -4a + 6b &= 0 \\ 4a &= 6b \\ \frac{a}{b} &= \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Pomer väčšieho čísla k menšiemu je 3 : 2.

Úloha 1.3: Nájdite najmenšie kladné celé číslo, ktorého polovica je druhou mocninou celého čísla a tretina treťou mocninou celého čísla.

Výsledok: 648

Riešenie:

Zo zadania vieme, že hľadané číslo musí byť deliteľné 2 a 3. Keďže hľadáme najmenšie možné číslo, iné prvočíselné delitele mať nebude, teda nám stačí zistiť, koľkokrát budú 2 a 3 v prvočíselnom rozklade tohto čísla.

Aby číslo bolo druhou mocninou, musí byť v jeho prvočíselnom rozklade počet každého z prvočísel párny. To znamená, že v rozklade hľadaného čísla je počet trojok párny a počet dvojok nepárny (keďže polovica čísla má v rozklade o jednu dvojku menej ako pôvodné číslo).

Aby číslo bolo treťou mocninou, musí byť v jeho prvočíselnom rozklade počet každého z prvočísel deliteľný tromi. To znamená, že v rozklade hľadaného čísla je počet dvojok deliteľný tromi a počet trojok dáva zvyšok 1 po delení tromi (keďže tretina čísla má v rozklade o jednu trojku menej ako pôvodné číslo).

Najmenšie nepárne číslo deliteľné tromi je 3, teda dvojka bude v rozklade hľadaného čísla trikrát. Najmenšie párne číslo dávajúce zvyšok 1 po delení tromi je 4, teda trojka tam bude štyrikrát. Dostávame tak hľadané číslo $2^3 \cdot 3^4 = 648$.

Úloha 1.4: Číslo nazveme *rastúce*, keď jeho cifry tvoria rastúcu postupnosť (napr. čísla 3, 2357, 12478 sú *rastúce*). Koľko existuje *rastúcich* kladných celých čísel?

Výsledok: 511

Riešenie:

Všimnime si, že najväčšie existujúce *rastúce* číslo je 123456789. Jednoduchým pozorovaním prideme na to, že ku všetkým ostatným *rastúcim* číslam sa vieme dostať tak, že z tohto čísla vyškrtne niekoľko cifier, resp. niekoľko cifier nám po vyškrtaní ostane.

To znamená, že nám stačí o každej cifre rozhodnúť, či v čísle bude, alebo nebude. Pre každú z cifier teda máme 2 možnosti. Dokopy teda máme $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^9 = 512$ rôznych možností, ako vyškrtnúť niektoré z cifier. Od tohto počtu ešte odčítame jednu možnosť, v ktorej sme preškrtnú všetky cifry, keďže to nám neposkytne validné riešenie. Preto existuje dokopy 511 *rastúcich* čísel.

Úloha 1.5: Trojuholník ABC má dĺžky strán 13, 14 a 15. Na stranách AB , BC a CA sú zvolené postupne body D , E , F tak, že trojuholníky CEF , ADF a BDE majú rovnaký obvod, ktorý je rovný $4/5$ obvodu DEF . Určte obvod DEF .

Výsledok: 30

Riešenie: Trojuholník ABC má obvod $13 + 14 + 15 = 42$. Súčet obvodov trojuholníkov CEF , ADF a BDE sa rovná súčtu obvodov trojuholníkov ABC a DEF . Obvod trojuholníka ABC už poznáme a tiež vieme, že obvody trojuholníkov CEF , ADF a DEF majú rovnaké obvody (označme si ich o) rovné $4/5$ obvodu DEF . Obvod DEF teda vieme zistiť jednoduchou rovnicou:

$$\begin{aligned} 3o &= o_{ABC} + o_{DEF} \\ 3 \cdot \frac{4}{5}o_{DEF} &= 42 + o_{DEF} \\ \frac{12}{5}o_{DEF} - o_{DEF} &= 42 \\ \frac{7}{5}o_{DEF} &= 42 \\ o_{DEF} &= 30 \end{aligned}$$

Úloha 1.6: Koľko existuje šesťciferných palindrómov deliteľných 7? (Palindróm je číslo, ktoré sa číta rovnako zľava aj sprava).

Výsledok: 140

Riešenie: Označme si prvé tri cifry hľadaných čísel postupne písmenami a , b a c . Hľadané palindrómy teda majú tvar $\overline{abccba}$. Z kritéria deliteľnosti číslom 7 vyplýva, že číslo $\overline{abccba}$ je deliteľné 7 práve vtedy, keď aj výraz $a + 3b + 2c + 6c + 4b + 5a = 6a + 7b + 8c$ je deliteľný 7.

Keďže vo výraze sa nachádza cifra b s koeficientom 7, výber tejto cifry nemá vplyv na deliteľnosť 7. Musí teda platiť, že $6a + 8c$ je deliteľné 7. To je ekvivalentné s tvrdením, že $c - a$ je deliteľné 7, nakoľko výrazy $8c$ a c majú rovnaký zvyšok po delení 7, keďže sa líšia o hodnotu $7c$, a podobne aj výrazy $6a$ a $-a$ majú rovnaký zvyšok po delení 7, pretože sa líšia o hodnotu $7a$.

Musíme teda nájsť také dvojice cifier, ktorých rozdiel je deliteľný 7. Keďže sa jedná o cifry, a tie nadobúdajú len hodnoty od 0 do 9, hľadáme dvojice cifier s rozdielom 0 alebo 7. Pre cifru a navyše ešte máme podmienku, že musí byť nenulová, inak by $\overline{abccba}$ nebolo šesťciferné číslo. V tabuľke sa nachádzajú všetky dvojice cifier, čo spĺňajú naše podmienky.

a	c	a	c
1	1	1	8
2	2	2	9
3	3		
4	4		
5	5		
6	6		
7	7	7	0
8	8	8	1
9	9	9	2

Vidíme, že máme 14 možností na výber cifier a a c . Ku každému z týchto výberov máme ešte 10 možností na výber cifry b . Spolu teda existuje 140 šesťciferných palindrómov deliteľných 7.

Úloha 1.7: Nájdite všetky možné dĺžky obvodov pravouhlých trojuholníkov s celočíselnými dĺžkami strán, v ktorých sa obvod rovná obsahu.

Výsledok: 30, 24

Riešenie: Označme si dĺžky odvesien a , b a dĺžku prepony c . Keďže hľadáme pravouhlé trojuholníky, tak z Pytagorovej vety platí $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Zároveň vieme, že obvod trojuholníka sa rovná jeho obsahu, teda platí $a + b + c = ab/2$. Nahradíme v tejto rovnici c jeho vyjadrením z Pytagorovej vety a následne upravíme:

$$\begin{aligned}
 a + b + \sqrt{a^2 + b^2} &= \frac{ab}{2} \\
 2\sqrt{a^2 + b^2} &= ab - 2a - 2b \\
 4a^2 + 4b^2 &= a^2b^2 + 4a^2 + 4b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 8ab \\
 a^2b^2 - 4a^2b - 4ab^2 + 8ab &= 0
 \end{aligned}$$

Vieme, že dĺžky strán trojuholníka sú určite nenulové, a preto môžeme celú rovnicu vydeliť ab . Dostaneme tak $ab - 4a - 4b + 8 = 0$. Teraz, keď pripočítame 8 na každú stranu, tak vieme pravú stranu rozložiť na súčin a dostávame $(a - 4)(b - 4) = 8$. Bez ujmy na všeobecnosti (teda nasledujúcu vlastnosť môžeme predpokladať bez toho, aby sme nejaké prípady stratili) nech $a \leq b$, teda aj $a - 4 \leq b - 4$. Činitele $a - 4$ a $b - 4$ sú celočíselné, ich súčin je 8 a nakoľko $a > 0$, tak $a - 4 > -4$.

Na to máme tieto možnosti:

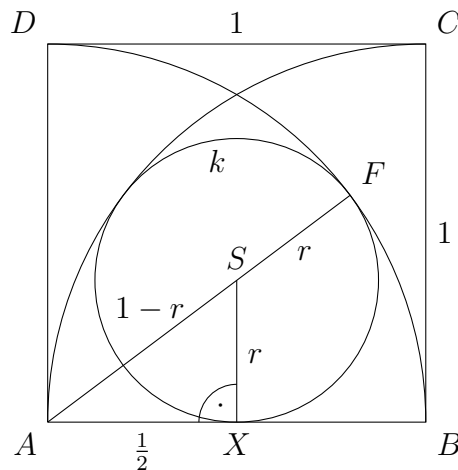
$a - 4$	$b - 4$	a	b
1	8	5	12
2	4	6	8

V prvej možnosti dostaneme $c = 13$ a v druhej $c = 10$. Možné obvody takýchto trojuholníkov sú teda $5 + 12 + 13 = 30$ a $6 + 8 + 10 = 24$.

Úloha 1.8: Nech $ABCD$ je jednotkový štvorec. V štvorci nakreslíme oblúk kružnice so stredom v bode A , ktorého koncové body sú B a D . Podobne nakreslíme oblúk kružnice so stredom v bode B , ktorého koncové body sú A a C . Vpíšeme kružnicu, ktorá sa vnútorne dotýka oblúka AC , oblúka BD , a zároveň sa dotýka strany AB . Nájdite polomer tejto kružnice.

Výsledok: $3/8$

Riešenie: Označme si vpísanú kružnicu zo zadania k . Označme si stred kružnice k ako S a označme F jej dotykový bod s kružnicovým oblúkom BD .



Body A , S a F sú kolineárne, pretože v bode dotyku F má aj kružnica k , aj kružnicový oblúk BD totožnú dotyčnicu, a teda A aj S ležia na kolmici tejto dotyčnice prechádzajúcej bodom F .

Označme si X bod dotyku kružnice k s AB , pričom zo symetrie to je zároveň aj stred strany AB . Označme si r dĺžku polomeru kružnice k , takže $|SX| = |SF| = r$. Všimnime si, že $|AF| = 1$, keďže F leží na oblúku BD , a preto má rovnakú dĺžku ako AB . Potom $|AS| = |AF| - |SF| = 1 - r$.

Uhol $\angle AXS$ je pravý, keďže AB je dotyčnicou ku kružnici k s bodom dotyku X . V pravouhlom trojuholníku AXS je $|AX| = 1/2$, a potom už vieme pomocou Pytagorovej vety dopočítať hľadaný polomer r :

$$r^2 = (1 - r)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$r^2 = 1 - 2r + r^2 - \frac{1}{4}$$

$$2r = \frac{3}{4}$$

$$r = \frac{3}{8}$$

Úloha 1.9: Nech f je funkcia, ktorá číslo zapíše v dvojkovej sústave a následne z neho vynechaním núl vytvorí číslo v desiatkovej sústave. Napríklad $f(5)$ je 11, lebo 5 v dvojkovej sústave je 101 a keď z neho vynecháme nuly, tak dostaneme 11. Koľko existuje kladných celých čísel n menších ako 256, pre ktoré je $f(n)$ deliteľné číslom 37?

Výsledok: 84

Riešenie: $256 = 2^8$, teda v dvojkovej sústave bude najmenším 9-ciferným číslom, a to 10000000. To znamená, že budeme hľadať čísla, ktoré sú v dvojkovej sústave najviac 8-ciferné.

Ďalej sa pozrime na násobky 37. Budeme hľadať také, ktoré sú zložené len z cifier 1, pretože v dvojkovej sústave používame len cifry 1 a 0 a nuly podľa zadania funkcia f vynecháva. Takýmito násobkami menšími ako 100000000 sú 111 a 111111.

Najprv sa pozrime na 111. Je to trojciferné číslo, preto k nemu môžeme pripísať najviac päť cifier 0. V dvojkovej sústave zároveň platí, že cifry 0 sa na začiatku čísla nerátajú, teda ak by sme napísali napríklad číslo 00011100, išlo by o také isté číslo ako 11100, a teda sme získali možnosť, kde sme dopísali k číslu 111 iba dve cifry 0. To znamená, že ak vyrátame počet možných permutácií troch cifier 1 a piatich cifier 0, zistíme aj koľko existuje takých n , pre ktoré sa funkcia f rovná 111. Použijeme na to vzorec pre výpočet permutácií s opakovaním, kde máme množinu 8 prvkov, 3 prvky jedného druhu (cifry 1) a 5 prvkov druhého (cifry 0), teda:

$$\frac{8!}{5!3!} = 56$$

Rovnaký postup použijeme aj pri čísle 111111. Keďže ide o 6-ciferné číslo, budeme k nemu môcť pripísať najviac dve cifry 0. Teda použijeme vzorec pre výpočet permutácií s opakovaním, kde máme množinu 8 prvkov, 6 prvkov jedného druhu (cifry 1) a 2 prvky druhého (cifry 0), teda:

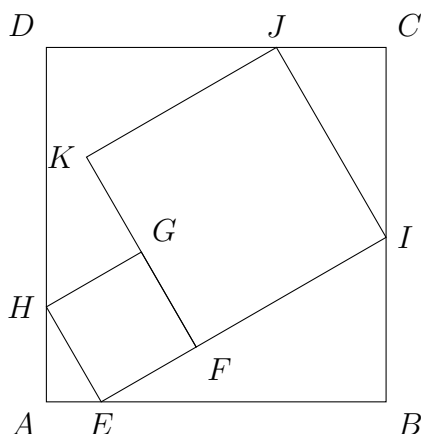
$$\frac{8!}{6!2!} = 28$$

Nakoniec už len sčítame počet možných permutácií:

$$56 + 28 = 84$$

Existuje teda 84 takých čísel.

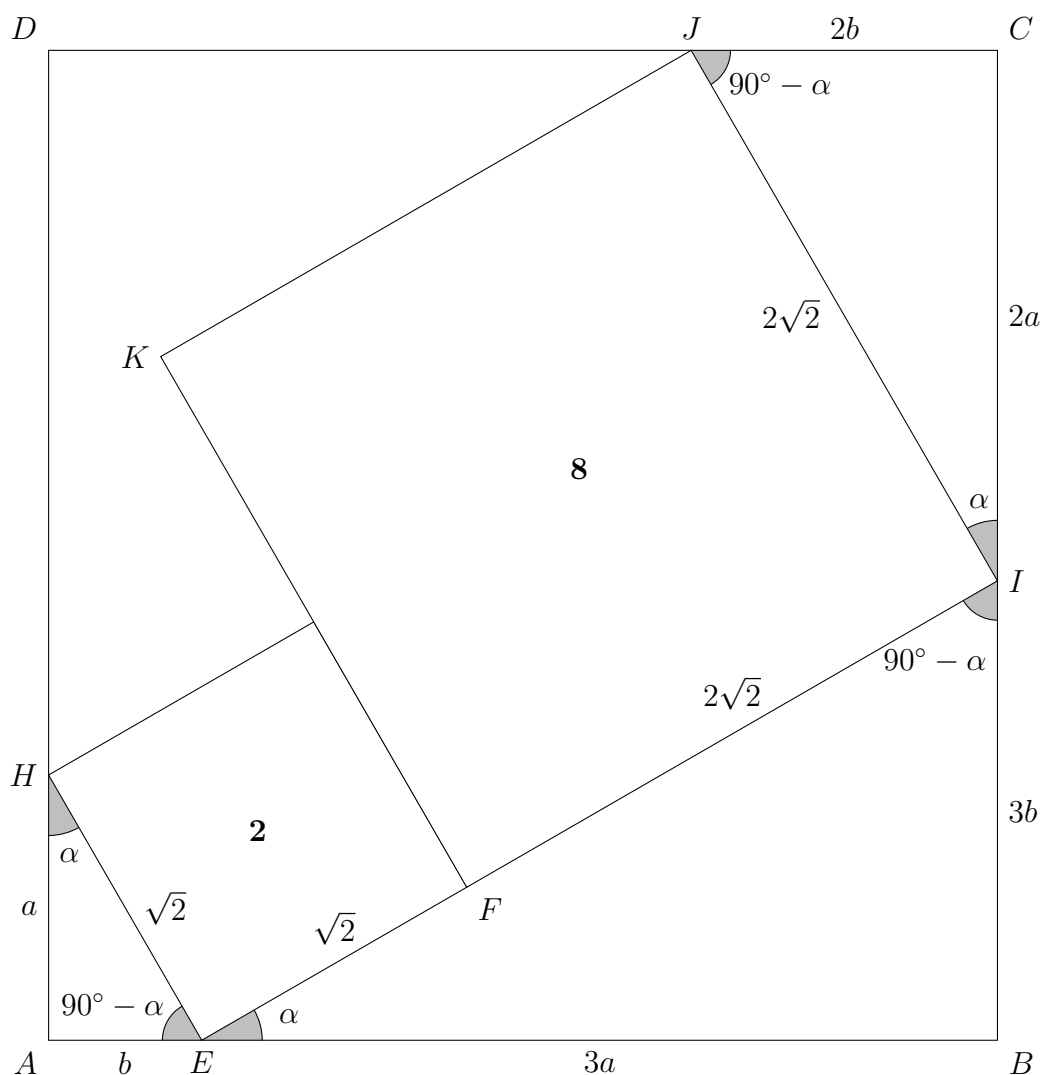
Úloha 1.10: Je daný štvorec $ABCD$ a v ňom štvorce $EFGH$ a $FIJK$ ako na obrázku. Body E, F, I ležia na jednej priamke a body E, I, J, H ležia na stranách štvorca $ABCD$. Obsah štvorca $EFGH$ je 2 a obsah štvorca $FIJK$ je 8. Určte dĺžku strany štvorca $ABCD$.



Výsledok: $7\sqrt{2}/\sqrt{5}$

Riešenie: Štvorec $EFGH$ má stranu dlhú $\sqrt{2}$ a štvorec FJK má stranu dlhú $2\sqrt{2}$.

Nech $|\angle AHE| = \alpha$, potom $|\angle AEH| = 90^\circ - \alpha$. Z toho vyplýva $|\angle IEB| = \alpha$ a $|\angle EIB| = 90^\circ - \alpha$. Ďalej $|\angle CIJ| = \alpha$ a $|\angle IJC| = 90^\circ - \alpha$. Trojuholníky AEH, BIE, CJI sú teda podobné. Navyše dĺžky ich prepôn sú postupne $\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$. Aj dĺžky ich odvesien budú v pomere $1 : 3 : 2$. Označíme si ich ako na obrázku.



Hľadáme teda dĺžku $b + 3a$. Môžeme si zapísať a riešiť nasledujúce rovnice:

$$a^2 + b^2 = 2$$

$$b + 3a = 2a + 3b$$

$$a = 2b$$

$$4b^2 + b^2 = 2$$

$$5b^2 = 2$$

$$b^2 = 2/5$$

$$b = \sqrt{2}/\sqrt{5}$$

$$a = 2\sqrt{2}/\sqrt{5}$$

$$b + 3a = 7\sqrt{2}/\sqrt{5}$$

Úloha 1.11: Nájdite všetky reálne čísla x , pre ktoré platí: $(8^x + 27^x)/(12^x + 18^x) = 61/36$.

Výsledok: 2, -2

Riešenie: Najprv si zadanú rovnicu môžeme upraviť nasledovným spôsobom:

$$\frac{(2^3)^x + (3^3)^x}{(2^2 \cdot 3)^x + (2 \cdot 3^2)^x} = \frac{61}{36}$$
$$\frac{2^{3x} + 3^{3x}}{2^{2x} \cdot 3^x + 2^x \cdot 3^{2x}} = \frac{61}{36}$$

Pre zjednodušenie zavedieme označenie $2^x = a$ a $3^x = b$. Po tejto substitúcii môžeme rovnicu prepísať do tvaru:

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2b + ab^2} = \frac{61}{36}$$

Teraz budeme už len pokračovať v úpravách:

$$\frac{(a^2 - ab + b^2)(a + b)}{ab(a + b)} = \frac{61}{36}$$
$$\frac{(a^2 - ab + b^2)}{ab} = \frac{61}{36}$$
$$36a^2 - 36ab + 36b^2 = 61ab$$
$$36a^2 - 97ab + 36b^2 = 0$$
$$(9a - 4b)(4a - 9b) = 0$$

Na to, aby sa ľavá strana rovnice rovnala 0, musí platiť buď, že $9a - 4b = 0$, alebo $4a - 9b = 0$. Pozrime sa najprv na prvú možnosť, $9a - 4b = 0$, čiže $9a = 4b$. V tejto chvíli si za a a b naspäť dosadíme 2^x a 3^x . Takže máme rovnicu:

$$9 \cdot 2^x = 4 \cdot 3^x$$
$$3^2 \cdot 2^x = 2^2 \cdot 3^x$$
$$2^{x-2} = 3^{x-2}$$

Rovnaké mocniny 2 a 3 sa rovnajú iba v prípade, keď sa jedná o nulté mocniny. Z toho vyplýva, že $x - 2 = 0$, a teda $x = 2$.

Z druhej možnosti, $4a - 9b = 0$, by sme úpravami dostali rovnicu $2^2 \cdot 2^x = 3^2 \cdot 3^x$, čiže $2^{x+2} = 3^{x+2}$. Z čoho vyplýva, že $x + 2 = 0$, a teda $x = -2$.

Úloha 1.12: Koľko neprázdnych podmnožín S množiny $\{1, 2, \dots, 15\}$ má nasledujúce vlastnosti?

- S neobsahuje žiadne dve po sebe idúce čísla.
- Ak S obsahuje k prvkov, S neobsahuje žiadne číslo menšie ako k .

Výsledok: 405

Riešenie: Zamyslime sa najprv nad jednoduchšou úlohou všeobecne:

Koľko podmnožín množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ má veľkosť k a neobsahuje žiadne dve po sebe idúce čísla?

Chceme vybrať k čísel z našej množiny, ale nemôžu byť po sebe idúce. Teda si predstavme, že budeme vyberať k za sebou idúcich dvojíc čísel z množiny $\{1, 2, \dots, n+1\}$. Prvé číslo vo vybratej dvojici je číslo, ktoré reálne vyberáme, a druhé číslo nám zaistí, že nevyberieme žiadne susedné už vybrateho čísla (už ho nemôžeme vybrať znova). Všimnime si, že $n+1$ sa vybrať nedá. Pre ľubovoľný výber pôvodným spôsobom vieme pridružiť ku každému vybratejmu číslu číslo za ním a budeme mať výber druhým spôsobom. Teda výbery prvého spôsobu sú podmnožinou výberov druhého spôsobu. Analogicky vieme z ľubovoľného výberu druhým spôsobom zobrať iba prvé čísla z dvojíc a tie budú vyhovovať podmienkam v prvom spôsobe. Teda výbery druhého spôsobu sú podmnožinou výberov prvého spôsobu. To znamená, že výberové množiny sú si rovné.

Podobným princípom môžeme vidieť, že vybrať k dvojíc za sebou idúcich čísel z $n+1$ čísel je rovnaké, ako vybrať k čísel z $n+1-k$. Rovnako za výbery vieme dodať druhé čísla do dvojíc (čísla sa nám poposúvajú ale na výberoch to nič nemení) alebo naopak z dvojice vybrať prvé.

Počet možností, ako vybrať k prvkov z $n-k+1$ prvkovej množiny je $\binom{n-k+1}{k}$. Teda to je aj počet možností, ako vybrať z množiny $\{1, 2, \dots, n\}$ k čísel tak, aby žiadne dve neboli po sebe idúce.

Zo zadania však vieme, že ak chceme vybrať podmnožinu s k prvkami, nemôžeme použiť čísla menšie ako k , teda vyberáme k prvkov z množiny $\{k, k+1, \dots, n\}$.

Všimnime si, že táto množina má veľkosť $n-k+1$. Teda počet podmnožín veľkosti k , ktoré spĺňajú obe podmienky v zadaní, kde $n=15$, bude:

$$\binom{(n-k+1)-k+1}{k} = \binom{17-2k}{k}$$

Teda počet možností pre jednotlivé k ($k \geq 6$ nie je možné, lebo by sme chceli vybrať 6 či viac čísel z 5, čo logicky nejde) je:

k	počet možností
1	$\binom{15}{1} = 15$
2	$\binom{13}{2} = 78$
3	$\binom{11}{3} = 165$
4	$\binom{9}{4} = 126$
5	$\binom{7}{5} = 21$

Teda celkový počet možností je $15 + 78 + 165 + 126 + 21 = 405$.

2. časť

Úloha 2.1: Vynásobíme všetky dvojciferné čísla deliteľné číslom 15. Výsledok delíme tromi, až kým neostane číslo, ktoré nie je deliteľné tromi. Aké číslo ostane?

Výsledok: 1 250 000

Riešenie: Na začiatok si zoberme všetky dvojciferné čísla deliteľné 15 a pozrime sa na ich prvočíselný rozklad.

$$15 = 3 \cdot 5$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$45 = 3^2 \cdot 5$$

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$75 = 3 \cdot 5^2$$

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Teraz teda potrebujeme zistiť, aký výsledok dostaneme, ak súčin týchto čísel vydělíme najvyšším možným počtom trojčiek. To nám v preklade hovorí, že z prvočíselného rozkladu daných čísel môžeme odstrániť všetky trojky a zvyšok vynásobiť. Po odstránení trojčiek dostávame:

$$5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 5 = 5^7 \cdot 2^4$$

To vieme ešte upraviť na $10^4 \cdot 5^3$, čo po vyčíslení dá 1 250 000.

Úloha 2.2: Koľko 9-ciferných kladných celých čísel s navzájom rôznymi nenulovými ciframi je deliteľných číslom 45?

Výsledok: $8! = 40\,320$

Riešenie: Číslo je deliteľné 45 práve vtedy, keď je deliteľné 9 a zároveň je deliteľné 5.

Hľadané 9-ciferné čísla majú všetky cifry rôzne a nenulové, takže každá cifra od 1 po 9 sa v každom čísle vyskytuje práve raz. Aby boli deliteľné 5, musí byť cifra 5 vždy na poslednom mieste. Súčet cifier od 1 po 9 je 45, čo znamená, že nezáleží na usporiadaní zvyšných 8 cifier a výsledné číslo bude vždy deliteľné 9.

Preto hľadáme počet permutácií 8 rôznych cifier a to je $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40\,320$.

Úloha 2.3: Nech a, b, c, d, e sú kladné celé čísla, pre ktoré platí $a < b < c < d < e$. Ich aritmetický priemer je 10, rozdiel medzi najväčším a najmenším číslom je 12 a $c = 7$. Zistite hodnotu d .

Výsledok: 15

Riešenie: Vieme, že $a + 12 = e$ a $c = 7$. Zapišme si ich aritmetický priemer, doplníme doň tieto poznatky a zjednodušíme vzniknutú rovnicu:

$$\frac{a + b + c + d + e}{5} = 10$$

$$a + b + c + d + e = 50$$

$$a + b + 7 + d + (a + 12) = 50$$

$$2a + b + d = 31$$

Z rovnice sa bližšie k hodnote d nedostaneme, pretože jej riešením bude hneď niekoľko trojíc (a, b, c) . Vieme však tiež, že $a < b < 7$ a $7 < d < a + 12$. Stačí sa už iba zamyslieť nad tým, ako nám tieto obmedzenia redukovú počet možností.

Je niekoľko možností, ako to spraviť. Najjednoduchšie to pôjde ak sa zamyslíme nad tým, aké hodnoty môže nadobúdať b :

- Keby platilo $b = 6$, tak a môže byť najviac 5. V tom prípade z rovnice dostávame $2 \cdot 5 + 6 + d = 31$, čiže $d = 15$. Všimnime si, že ak by a bolo menšie ako 5, tak by výsledné d bolo väčšie ako $a + 12$. Pre $b = 6$ máme preto iba jedno riešenie.
- Keby platilo $b \leq 5$, tak by maximálna hodnota súčtu $2a + b$ bola $2 \cdot 4 + 5 = 13$. Hodnota d by preto bola aspoň 18, čo v každom prípade nebude menej ako $a + 12$. V tejto možnosti preto nemáme žiadne riešenie.

Ukázali sme teda, že jediná hodnota, ktorú môže d nadobudnúť, je 15.

Úloha 2.4: V obchode vykúpilo n zákazníkov celú zásobu pistácií. Najprv prvý zákazník kúpil 10 balení plus desatinu zo zvyšných zásob. Potom druhý zákazník kúpil 20 balení plus desatinu zo zvyšných zásob. Takto to pokračovalo až kým n -tý zákazník kúpil $10n$ balení pistácií a v obchode vtedy už neostalo žiadne balenie. Ak všetci zákazníci kúpili rovnaké množstvo pistácií, koľko balení mal obchod pôvodne v zásobe?

Výsledok: 810

Riešenie: Vieme, že všetci zákazníci si kúpili rovnaký počet balení a že posledný zákazník si kúpil $10n$ balení. Spolu je zákazníkov n , preto celkový počet balení môžeme vyjadriť ako $10n^2$.

Skúsme si teraz vyjadriť koľko balení si kúpil prvý zákazník. Bolo to 10 balení plus desatina zvyšných balení, čiže $10 + (10n^2 - 10)/10 = n^2 + 9$. Nakoľko vieme, že si balení kúpil rovnako veľa ako posledný zákazník, postavme si ich do rovnice a vypočítajme ju. Vo vzorovom riešení je použitá úprava ľavej strany na súčin pomocou Vietových vzťahov. Fungoval by však aj bežný vzorec na riešenie kvadratickej rovnice.

$$\begin{aligned}n^2 + 9 &= 10n \\n^2 - 10n + 9 &= 0 \\(n - 1)(n - 9) &= 0 \\n &\in \{1, 9\}\end{aligned}$$

Zo zadania vyplýva, že zákazníci boli aspoň dvaja. Riešením je preto iba $n = 9$. Celkový počet balení preto bude $10n^2 = 10 \cdot 9^2 = 810$.

Úloha 2.5: Zistite, koľkými spôsobmi môžeme z množiny $\{1, 2, 3, \dots, 19, 20\}$ vybrať trojprvkovú podmnožinu, ktorej súčin prvkov je deliteľný štyrmi.

Výsledok: 795

Riešenie: Rýchlejšie bude sa na to pozrieť z opačnej strany, čiže zistiť, koľkými spôsobmi vieme vybrať trojprvkové podmnožiny, ktorých súčin nie je deliteľný 4, a potom to odrátať od počtu všetkých trojprvkových podmnožín.

Súčin trojprvkovej podmnožiny nie je deliteľný 4 len v dvoch prípadoch – ak sú v nej tri nepárne čísla, alebo práve jedno párne číslo nedeliteľné 4 a dve nepárne čísla.

V množine zo zadania je desať nepárnych čísel, takže existuje $\binom{10}{3} = 120$ možností, ako vybrať trojprvkovú podmnožinu obsahujúcu len nepárne čísla.

Párnych čísel, ktoré nie sú deliteľné 4, je v množine zo zadania 5, čo znamená, že máme $\binom{5}{1} = 5$ možností, ako vybrať jedno také číslo do našej podmnožiny a $\binom{10}{2} = 45$ možností, ako vybrať zvyšné dve nepárne. Z toho vyplýva, že máme $5 \cdot 45 = 225$ možností, ako vybrať trojprvkovú podmnožinu obsahujúcu práve jedno párne číslo nedeliteľné 4 a práve dve nepárne čísla.

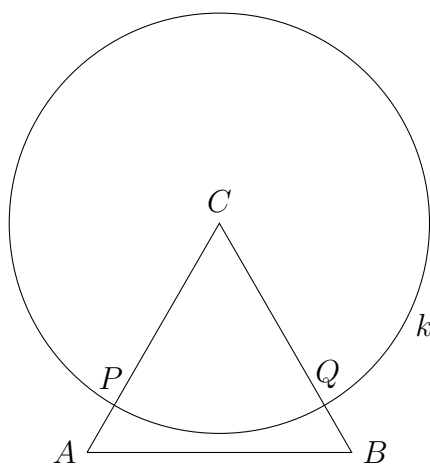
Dokopy teda máme $120 + 225 = 345$ možností, ako vybrať trojprvkovú podmnožinu, ktorej súčin nie je deliteľný 4.

Počet všetkých možností, ako vybrať akúkoľvek trojprvkovú podmnožinu z množiny zo zadania je $\binom{20}{3} = 1140$, čiže počet možností, ako vybrať trojprvkovú podmnožinu, ktorej súčin je deliteľný 4, je $1140 - 345 = 795$.

Úloha 2.6: Majme rovnostranný trojuholník ABC . Nech C je stredom kružnice k s polomerom menším než dĺžka strany AB . Body P a Q sú priesečníky k so stranami AC a BC . Kratší oblúk PQ je rovnako dlhý ako strana AB . Zistite obvod trojuholníka ABC , ak obvod útvaru $ABQP$ (zloženého z úsečiek a oblúku) je $4\pi - 6$.

Výsledok: 3π

Riešenie:



Keď si načrtujeme situáciu zo zadania, môžeme si všimnúť, že PQ je kružnicový oblúk kružnice k tvorený stredovým uhlom ACB . Keďže trojuholník ABC je rovnostranný, veľkosť uhla ACB je 60° . To je presne $1/6$ z 360° , čo znamená, že dĺžka kružnicového oblúka PQ tvorí šestinú celej dĺžky kružnice k .

Označme si polomer kružnice k ako r . Podľa vzorca na výpočet dĺžky kružnice je potom dĺžka kružnice k rovná $2\pi r$, teda šestina z toho je $2\pi r/6 = \pi r/3$. To je zároveň dĺžka kružnicového oblúka PQ .

Keďže vieme, že obvod útvaru $ABQP$ je $4\pi - 6$, môžeme si vytvoriť rovnicu a dosadiť všetko, čo už poznáme:

$$|AB| + |\widehat{PQ}| + |AP| + |BQ| = 4\pi - 6$$

Každú zo štyroch dĺžok si vyjadríme pomocou toho, čo už vieme, teda že $|AB| = |\widehat{PQ}| = \pi r/3$ a zároveň AP a BQ sú časti strán trojuholníka AC a BC , pričom PC a QC majú dĺžku r a platí $|AB| = |AC| = |BC|$:

$$\begin{aligned} \frac{\pi r}{3} + \frac{\pi r}{3} + (|AC| - |PC|) + (|BC| - |QC|) &= 4\pi - 6 \\ \frac{2\pi r}{3} + \left(\frac{\pi r}{3} - r\right) + \left(\frac{\pi r}{3} - r\right) &= 4\pi - 6 \end{aligned}$$

Následne už len použijeme ekvivalentné úpravy:

$$\begin{aligned}
 \frac{2\pi r}{3} + 2\left(\frac{\pi r}{3} - r\right) &= 2(2\pi - 3) & / : 2 \\
 \frac{\pi r}{3} + \frac{\pi r}{3} - r &= 2\pi - 3 \\
 \frac{2\pi r}{3} - r &= 2\pi - 3 & / \cdot 3 \\
 2\pi r - 3r &= 3(2\pi - 3) \\
 r(2\pi - 3) &= 3(2\pi - 3) & / : (2\pi - 3) \\
 r &= 3
 \end{aligned}$$

Obvod trojuholníka ABC teda vypočítame ako $3 \cdot |AB| = 3 \cdot \pi r / 3 = \pi r = 3\pi$.

Úloha 2.7: Nájdite najväčšie kladné celé číslo n také, že $100!/(n!)^5$ je celé číslo.

Výsledok: 21

Riešenie: Existuje 9 násobkov prvočísla 11, ktoré sú menšie ako 100. Výraz $n!$ preto vo svojom prvočíselnom rozklade obsahuje mocninu 11^9 . Aby bol zlomok zo zadania celočíselný, rozklad $(n!)^5$ nemôže obsahovať vyššiu mocninu 11 ako 11^9 .

Ak zvolíme n väčšie alebo rovné jedenásť, rozklad $(n!)^5$ bude určite obsahovať aspoň 11^5 . Ak by sme zvolili n väčšie alebo rovné 22, v rozklade $(n!)^5$ už bude mocnina 11^{10} . Preto hľadané n nemôže byť väčšie ako 21.

Ostáva nám ale ešte overiť, či pre $n = 21$ je zlomok zo zadania naozaj celé číslo. To spravíme podobnou úvahou s prvočíselným rozkladom ako doteraz. V rozklade $(21!)^5$ sa budú nachádzať len prvočísla menšie alebo rovné 21, konkrétne teda 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 a 19. Číslo 11 už máme vyskúšané, ostáva teda overiť ešte tie zvyšné.

Medzi číslami od 1 do 100 sa nachádza 50 násobkov dvojky, 25 násobkov 2^2 , 12 násobkov 2^3 , 6 násobkov 2^4 , 3 násobky 2^5 , no a napokon jediný násobok 2^6 . V rozklade čísla $100!$ sa teda bude nachádzať mocnina $2^{(50+25+12+6+3+1)} = 2^{97}$. V číslach od 1 do 21 je 10 násobkov 2, 5 násobkov 2^2 , 2 násobky 2^3 a jediný násobok 2^4 . Výraz $21!$ teda v rozklade obsahuje mocninu 2^{18} . Z toho vyplýva, že výraz $(n!)^5$ obsahuje mocninu 2^{90} . Z mocnín 2 teda nevyplýva, že výraz zo zadania nebude celým číslom.

Analogicky overíme aj zvyšné prvočísla. V tabuľke vidíme, aké mocniny sa nachádzajú vo výrazoch $100!$ a $(21!)^5$.

	100!	$(21!)^5$
2	2^{97}	2^{90}
3	3^{48}	3^{45}
5	5^{24}	5^{20}
7	7^{16}	7^{15}
11	11^9	11^5
13	13^7	13^5
17	17^5	17^5
19	19^5	19^5

Keďže pre žiadne prvočíсло sa v menovateli zlomku zo zadania nenachádza väčšia mocnina ako v čitateli, vieme, že $n = 21$ je najväčšia hodnota n , pre ktorú bude zadaný zlomok celočíselný.

Úloha 2.8: Pre kladné celé číslo n označme $p(n)$ súčin všetkých jeho nenulových cifier. Určte hodnotu $p(1) + p(2) + \dots + p(999)$.

Výsledok: $46^3 - 1$

Riešenie: Na začiatok neberme do úvahy podmienku, že chceme iba súčin nenulových cifier, a podľa sa pozrieť, ako by sme to vyjadrili bez nej. Čísla 1 až 999 si predstavme všetko ako trojciferné čísla, kde prípadne pridáme správny počet núl na začiatok. Potom by celkový súčet súčinov cifier vyzeral nasledovne:

$$\begin{aligned} 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 2 + \dots + 9 \cdot 9 \cdot 9 &= (0 + 1 + \dots + 9)(0 + 1 + \dots + 9)(0 + 1 + \dots + 9) - (0 \cdot 0 \cdot 0) \\ &= (0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^3 - (0 \cdot 0 \cdot 0) \end{aligned}$$

Prvú rovnosť si vieme predstaviť, že platí vďaka tomu, ako pri roznásobovaní zátvoriek vzniknú všetky možné trojkombinácie, a teda všetky čísla od 001 po 999. Navyše už len odrátame možnosť $0 \cdot 0 \cdot 0$, ktorá pri roznásobovaní zátvoriek vznikne, ale my sme ju nechceli brať do úvahy.

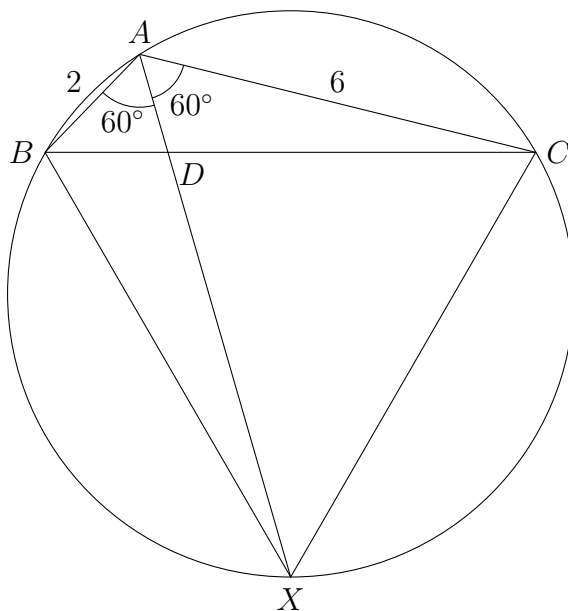
Teraz sa vráťme k podmienke, že $p(n)$ je súčin iba nenulových cifier. To môžeme vyriešiť tak, že v našom výraze nahradíme 0 za 1. Platí to preto, lebo ignorovať pri súčine cifier všetky nulové cifry je to isté ako ich v súčine nechať a nahradiť ich za 1, nijak daný súčin neovplyvnia. Preto platí:

$$p(1) + p(2) + \dots + p(999) = (1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^3 - (1 \cdot 1 \cdot 1) = 46^3 - 1$$

Úloha 2.9: Daný je trojuholník ABC a bod D na strane BC . Aká je veľkosť úsečky AD , ak uhly CAD a DAB majú veľkosť 60° , veľkosť úsečky AC je 2 a veľkosť úsečky AB je 6?

Výsledok: $3/2$

Riešenie: Do obrázku si dokreslíme kružnicu opísanú trojuholníku ABC a jej druhý priesečník s priamkou AD (označme ho X).



Uhly DAB a CAD sú zo zadania rovnaké, a preto je priamka AD osou vnútorného uhla pri vrchole A .

Všeobecne, o osi vnútorného uhla v ľubovoľnom trojuholníku platí, že pretína kružnicu jemu opísanú v strede oblúka medzi vrcholmi protiľahlej strany (tento bod sa nazýva aj Švrčkov bod).

V našej úlohe to znamená, že X je stred oblúka medzi bodmi B a C . Platí preto $|BX| = |CX|$. Zároveň, keďže je štvoruholník $ABXC$ tetivový a uhol BAC má 120° , tak uhol BXC bude mať 60° . Trojuholník BCX teda bude rovnostranný.

O osi vnútorného uhla v trojuholníku zároveň platí, že delí protiľahlú stranu v tom istom pomere, v akom sú dĺžky zvyšných dvoch strán trojuholníka. Podľa zadania vieme, že $|AB| : |AC| = 1 : 3$, teda aj $|BD| : |DC| = 1 : 3$.

Preto, ak si označíme dĺžku BD ako x , tak $|DC| = 3x$ a $|BX| = |CX| = |BC| = 4x$.

Všimnime si teraz, že trojuholníky ADC a ABX sú podobné podľa vety uu , lebo uhly CAD a DAB sú zo zadania rovnaké a takisto, uhly DCA a BXA sú rovnako veľké, lebo sú to obvodové uhly v tetivovom štvoruholníku $ABXC$ nad tetivou AB . Z tejto podobnosti dostávame rovnosť:

$$\frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|DC|}{|BX|} = \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}$$

Zo zadania vieme, že $|AB| = 2$, a teda $|AD| = 3/4 \cdot 2 = 3/2$.

Úloha 2.10: Rovinou je vedený rez, ktorý zasiahol práve tie body, ktorých súradnice x, y spĺňajú $2x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3 - 3x^2 + 3y^2 = 0$. Tento rez rozdelí rovinu na niekoľko častí, z ktorých iba jedna má konečný obsah. Vypočítajte tento obsah.

Výsledok: 3

Riešenie: Zadanú rovnosť rozložíme na súčin. To môže byť užitočné už tak z princípu a v tomto konkrétnom prípade nám môže pomôcť napríklad pozorovanie, že členy, ktorých koeficienty sa líšia len znamienkom, (sú ich tri jednoznačné páry) majú vždy v jednom x^2 a v druhom y^2 .

$$\begin{aligned}(x^2 - y^2)(2x - y - 3) &= 0 \\ (x + y)(x - y)(2x - y - 3) &= 0\end{aligned}$$

Zasiahnuté body sú teda práve tie, pre ktoré aspoň jedna zo zátvoriek je nulová. Inými slovami, množina zasiahnutých bodov je zjednotením troch množín, ktoré dostaneme ako množiny koreňov jednotlivých zátvoriek. Keďže v každej zátvorke je lineárny polynóm premenných x a y , rovnosť nuly a ktorejkoľvek zátvorky je rovnica priamky, a teda rez má podobu zjednotenia troch priamok.

Priamky určené rovnicami $x + y = 0$, $x - y = 0$ a $2x + y = 3$ sú navzájom rôznobežné (koeficienty pri x a pri y sú v rôznych pomeroch) a nemajú spoločný bod (prvé dve prechádzajú počiatkom, tretia nie), čiže rovinu delíme na trojuholník a šesť neobmedzených častí a úlohou je vypočítať obsah trojuholníka. Ako riešenia dvojíc lineárnych rovníc s dvomi neznámymi nájdeme vrcholy trojuholníka – $(0, 0)$, $(3, -3)$ a $(1, 1)$ v tvare (x, y) . Priamky $x + y = 0$ a $x - y = 0$ sú na seba kolmé, takže obsah trojuholníka vypočítame pomocou dĺžok odvesien:

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{(3-0)^2 + (-3-0)^2} \cdot \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{2} = 3$$

Úloha 2.11: Nájdite všetky kladné celé čísla n , pre ktoré platí $n = 11111 \cdot c(n)$, kde $c(n)$ je ciferný súčet n .

Výsledok: 499 995

Riešenie: Funkcia c (ciferný súčet) zachováva zvyšok po delení deviatimi. Teda $c(n)$ dáva rovnaký zvyšok po delení deviatimi ako n , čo je $11111 \cdot c(n)$. Rozdiel týchto dvoch čísel – $11110 \cdot c(n)$ – preto musí byť deliteľný deviatimi. Keďže však 11110 je nesúdeliteľné s deviatimi, $c(n)$ musí byť deliteľné deviatimi. Nech teraz k je také kladné celé číslo, že $c(n) = 9k$, a teda $n = 11111 \cdot c(n) = 99999k$.

Pre každé kladné celé k najmenšie kladné celé číslo s ciferným súčtom $9k$ je číslo zapísané k deviatkami bez akýchkoľvek iných číier, to jest číslo $10^k - 1$. Preto $10^k - 1 \leq n = 99999k$. Všetky riešenia potom musia spĺňať nerovnosť $10^k \leq 99999k + 1 \leq 99999k + k = 100000k$. Lenže pre $k \geq 6$ dokážeme indukciou, že $10^k > 100000k$: Pre $k = 6$ dostaneme platnú nerovnosť $1000000 > 600000$. Potom vždy, keď zvýšime k o 1, ľavá strana sa pre násobí 10, ale pravá sa pre násobí $(k+1)/k = 1 + 1/k$, čo začína na $7/6$ a klesá, čiže je vždy menšie ako 10.

V riešeniach preto musí $k < 6$. Dosadíme všetkých päť možností:

k	$9k$	$99999k$	$c(99999k)$
1	9	99999	45
2	18	199998	45
3	27	299997	45
4	36	399996	45
5	45	499995	45

Vyhovujú iba tie možnosti, ktoré majú v druhom a vo štvrtom stĺpci to isté (v oboch je $c(n)$), čiže iba $k = 5$, ktoré dáva $n = 499995$.

Úloha 2.12: Majme reálne čísla a, b, c , pričom $c \neq 1$. Rovnice $x^2 + ax + 1 = 0$ a $x^2 + bx + c = 0$ majú spoločný reálny koreň. Rovnako aj rovnice $x^2 + x + a = 0$ a $x^2 + cx + b = 0$ majú spoločný reálny koreň. Určte hodnotu výrazu $a + b + c$.

Výsledok: -3

Riešenie: Označme si spoločný koreň prvej dvojice rovníc reálnym číslom p . Platí teda:

$$\begin{aligned} p^2 + ap + 1 &= 0 \\ p^2 + bp + c &= 0 \end{aligned}$$

Po odčítaní druhej rovnice od prvej dostaneme:

$$\begin{aligned} (a - b)p + 1 - c &= 0 \\ (a - b)p &= c - 1 \end{aligned}$$

Keďže $c \neq 1$, tak pravá strana je nenulová, teda rovnako aj ľavá, z čoho plynie, že výraz $(a - b)$ je nenulový, teda ním môžeme deliť a dostaneme tak:

$$p = \frac{c - 1}{a - b} \quad (1)$$

Spoločný koreň druhej dvojice rovníc si označme reálnym číslom q . Analogicky prevedme dosadenie a následné vyjadrenie:

$$\begin{aligned} q^2 + q + a &= 0 \\ q^2 + cq + b &= 0 \\ (c - 1)q + b - a &= 0 \\ q &= \frac{a - b}{c - 1} \end{aligned}$$

Všimnime si, že platí vzťah $q = 1/p$.

Keďže je p koreňom rovnice $x^2 + ax + 1 = 0$, musí sa kvadratický polynóm na jej ľavej strane dať rozložiť na súčin zátvoriek ako $x^2 + ax + 1 = (x - p)(x - k_1) = x^2 + (-p - k_1)x + pk_1$, kde k_1 je druhým koreňom rovnice. Aby nastala rovnosť týchto polynómov, musí platiť $pk_1 = 1$, z čoho $k_1 = 1/p$. Ďalej, aby sa rovnali aj koeficienty pri lineárnych členoch, musí platiť:

$$\begin{aligned} -p - k_1 &= a \\ -p - \frac{1}{p} &= a \end{aligned} \quad (2)$$

O rovnici $x^2 + x + a = 0$ už vieme, že má koreň $q = 1/p$. Jej ľavá strana sa teda dá rozložiť ako

$$x^2 + x + a = (x - \frac{1}{p})(x - k_2) = x^2 + (-\frac{1}{p} - k_2)x + \frac{k_2}{p},$$

kde k_2 je druhým koreňom rovnice. Aby platila rovnosť, musí platiť $k_2/p = a$, z čoho $k_2 = ap$. Aby nastala rovnosť koeficientov pri lineárnych členoch, musí platiť:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p} - k_2 &= 1 \\ -\frac{1}{p} - ap &= 1 \end{aligned}$$

Z tejto rovnice si vyjadríme a . Môžeme deliť premennou p , keďže z jej vyjadrenia v rovnici (1) plynie, že je nenulová. Dostaneme:

$$\begin{aligned} -ap &= 1 + \frac{1}{p} \\ a &= -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \end{aligned} \tag{3}$$

Dajme do rovnosti premenné a z rovníc (2) a (3):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} &= -p - \frac{1}{p} \\ \frac{1}{p^2} &= p \\ 1 &= p^3 \end{aligned}$$

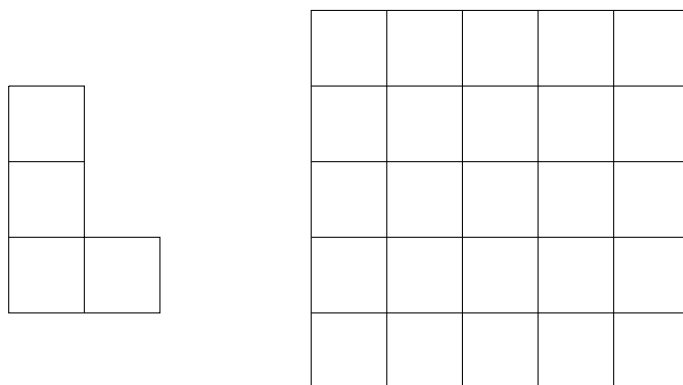
Jediné vyhovujúce p je tak 1. Z rovnice (3) potom plynie $a = -2$. Z toho po dosadení do rovnice (1) dostaneme:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{c-1}{-2-b} \\ -2-b &= c-1 \\ b+c &= -1 \end{aligned}$$

Z čoho dostávame súčet $a + b + c = -3$.

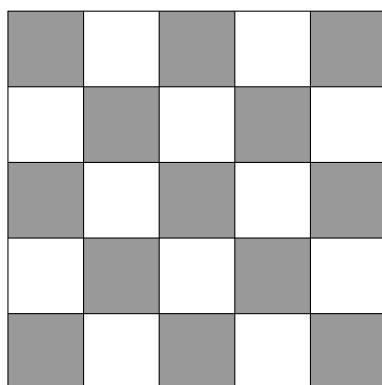
3. časť

Úloha 3.1: Koľko najviac tetromín tvaru L sa dá uložiť bez prekryvu do tabuľky na obrázku vpravo?



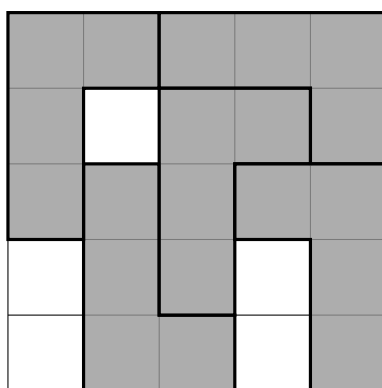
Výsledok: 5

Riešenie: Zafarbíme tabuľku na obrázku tradičným šachovnicovým ofarbením. Všimnime si, že sme takto dostali 13 tmavých štvorčekov, no len 11 svetlých.



Nech umiestnime tetromino do tabuľky na ľubovoľnú pozíciu, vždy pokryje práve 2 tmavé a 2 svetlé štvorčeky. Keďže máme dokopy len 11 svetlých štvorčekov, môžeme teoreticky do tabuľky umiestniť najviac 5 tetromín tvaru L (pretože 6 už pokryje 12 svetlých štvorčekov).

Stačí nám už len ukázať, že 5 tetromín do tabuľky vieme uložiť napr. ako na obrázku.



Úloha 3.2: V obchode predávajú tričká, nohavice a mikiny. Jedno tričko a dvojce nohavíc stoja dokopy toľko ako dve mikiny. Sedem nohavíc stojí toľko čo päť mikín a jeden kus z každého by dokopy stál 64 eur. Koľko eur stojí tričko?

Výsledok: 16

Riešenie: Na začiatok si pre zjednodušenie označme tričko T , nohavice N a mikinu M . Teraz pomocou toho prepíšme informácie vyplývajúce zo zadania.

$$T + 2N = 2M \quad (1)$$

$$7N = 5M \quad (2)$$

$$T + N + M = 64 \quad (3)$$

Z (1) si môžeme vyjadriť T ako $T = 2M - 2N$.

To vieme dosadiť do (2), čím získame $2M - 2N + N + M = 64$, resp. $3M - N = 64$.

S dvoma neznámymi sa teraz ďalej nedostaneme. Z (2) si však vieme vyjadriť N ako $N = \frac{5}{7}M$. Dosadením do $3M - N = 64$ získame:

$$3M - \frac{5M}{7} = 64$$

$$\frac{16}{7}M = 64$$

$$16M = 448$$

$$M = 28$$

Keďže už poznáme cenu M , vieme si vyjadriť N pomocou (2) ako:

$$N = \frac{5M}{7}$$

$$N = \frac{5 \cdot 28}{7}$$

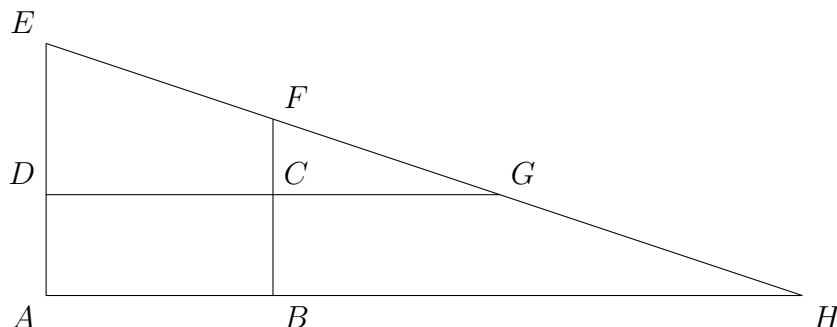
$$N = 20$$

Na záver už len jednoducho dopočítame cenu trička pomocou (3) ako:

$$T = 64 - N - M$$

$$T = 16$$

Úloha 3.3: Na obrázku vidíme obdĺžnik $ABCD$. Úsečka DE je predĺžením strany AD a má dĺžku 2, úsečka CF je predĺžením strany BC a má dĺžku 1, úsečka CG je predĺžením strany DC a má dĺžku 3 a napokon úsečka BH je predĺžením strany AB a má dĺžku 7. Body E , F , G a H ležia na jednej priamke. Aký je obsah obdĺžnika $ABCD$?



Výsledok: 4

Riešenie: Uvedomme si na začiatok, že $\triangle FCG$ a $\triangle EDG$ sú podobné podľa vety uu (majú spoločný uhol pri vrchole G a oba sú pravouhlé).

Pre podobné trojuholníky platí, že pomer dvojíc navzájom prislúchajúcich si strán je rovnaký. Vieme povedať, že keďže $|FC| = 1$ a $|ED| = 2$, tak všetky ich strany budú v pomere $1 : 2$. Platí, že $|CG| = 3$, potom $|DG| = 6$. To tiež znamená, že $|DC| = |AB| = 3$.

Ďalej si môžeme všimnúť, že sú zároveň rovnako podľa vety uu podobné aj $\triangle EDG$ a $\triangle EAH$ (pravouhlé trojuholníky a uhol AHE je súhlasný s uhlom DGE).

Z podobnosti $\triangle EAH$ a $\triangle EDG$ vieme povedať, že $|DG| = 6$, $|AH| = |AB| + |BH| = 3 + 7 = 10$, teda pomer dvojíc navzájom prislúchajúcich si strán je $6 : 10$, resp. $3 : 5$.

$$\frac{|DG|}{|AH|} = \frac{3}{5}$$

Z tejto podobnosti (pamätajme, že pomer dvojíc navzájom prislúchajúcich si strán je rovnaký) si najskôr vyjadríme $|EA|$, potom $|DA|$ ako $|DA| = |EA| - |ED|$.

$$\begin{aligned} \frac{|ED|}{|EA|} &= \frac{2}{|EA|} \\ \frac{|ED|}{|EA|} &= \frac{2}{|EA|} = \frac{|DG|}{|AH|} = \frac{3}{5} \\ |EA| &= \frac{2 \cdot 5}{3} = \frac{10}{3} \\ |DA| = |CB| &= |EA| - |ED| = \frac{10}{3} - 2 = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Keďže už poznáme dĺžky strán, môžeme spočítať obsah obdĺžnika $ABCD$:

$$S_{ABCD} = |AB| \cdot |BC| = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4.$$

Úloha 3.4: V súčine $24^a \cdot 25^b \cdot 26^c \cdot 27^d \cdot 28^e \cdot 29^f \cdot 30^g$ bolo namiesto siedmich exponentov a, b, c, d, e, f, g v nejakom poradí dosadených sedem čísel 1, 2, 3, 5, 8, 10, 11. Nájdite najväčší počet núl, ktorými môže končiť tento súčin.

Výsledok: 32

Riešenie: Počet núl na konci čísla je rovný počtu párov 2 a 5, ktoré sa nachádzajú v prvočíselnom rozklade daného čísla.

Pozrime sa teda na prvočíselné rozklady čísel zo zadania: $24 = 2^3 \cdot 3$, $25 = 5^2$, $26 = 2 \cdot 13$, $27 = 3^3$, $28 = 2^2 \cdot 7$, 29 je prvočíslo a napokon $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Prvočíselný rozklad celého súčinu si vieme vyjadriť ako $2^{3a+c+2e+g} \cdot 3^{a+3d+g} \cdot 5^{2b+g} \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29$.

Najvyššia mocnina 5, ktorú vieme dosiahnuť je 5^{32} a získame ju tak, že zvolíme $b = 11$ a $g = 10$. Je preto zrejmé, že výsledný súčin určite nemôže končiť na viac ako 32 núl.

Ostáva nám teda overiť, či naozaj vieme priradiť zvyšné exponenty tak, aby mal výsledný súčin 32 núl.

Stačí len, že zvolíme $a = 8$, $e = 5$ a už sa v prvočíselnom rozklade bude nachádzať aspoň mocnina 2^{34} , bez ohľadu na to, ako priradíme zvyšné exponenty. Súčin v zadaní teda môže končiť najviac 32 nulami.

Úloha 3.5: Nájdite také číslo, že keď vynásobíte všetky jeho delitele, dostanete 10^{50} .

Výsledok: 10000

Riešenie: Prvočíselný rozklad čísla 10^{50} je $2^{50} \cdot 5^{50}$. Z toho vyplýva, že v prvočíselných rozkladoch všetkých deliteľov čísla, ktoré hľadáme, sú dokopy 50-krát čísla 2 a 5. Keďže ich je rovnaký počet, bude musieť byť číslo, ktoré hľadáme, mocninou 10, teda musí byť v tvare 10^n .

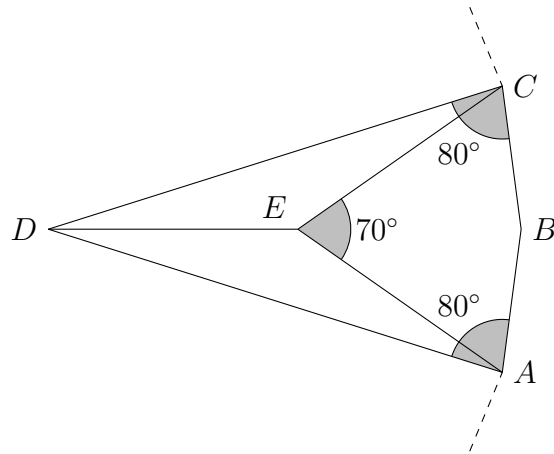
Všimnime si, že číslo 10^n môže mať práve $n + 1$ deliteľov, ktoré majú v prvočíselnom rozklade práve raz číslo 5. Napríklad pre $n = 2$ by to boli 5, 10, 20, pretože 2 sa môže vyskytovať v každom deliteli čísla 10^2 najviac 2-krát. To platí aj pre delitele, ktoré majú číslo 5 v prvočíselnom rozklade 2-krát, 3-krát až po n -krát.

Počet všetkých pätiiek v prvočíselných rozkladoch všetkých deliteľov vieme preto vyjadriť nasledovne: $(n + 1) \cdot 1 + (n + 1) \cdot 2 + \dots + (n + 1) \cdot n$. Z prvej vety tohto riešenia, už vieme, že by tento výraz mal byť rovný 50, preto ho môžeme dorátať ako rovnicu s neznámou n :

$$\begin{aligned}(n + 1) \cdot 1 + (n + 1) \cdot 2 + \dots + (n + 1) \cdot n &= 50 \\(n + 1) \cdot (1 + \dots + n) &= 50 \\(n + 1) \cdot \left(\frac{n \cdot (n + 1)}{2}\right) &= 50 \\n^3 + 2n^2 + n &= 100 \\n &= 4\end{aligned}$$

Takže výsledkom je 10^4 , teda 10000.

Úloha 3.6: Na obrázku sú AB a BC strany pravidelného n -uholníka, $|\angle DAB| = |\angle BCD| = 80^\circ$, $|\angle CEA| = 70^\circ$ a $|AE| = |CE| = |DE|$. Aká je hodnota n ?



Výsledok: 24

Riešenie: Keďže $|AE| = |CE| = |DE|$, vieme trojuholníku ACD opísať kružnicu so stredom E . Uhol ADC je obvodový uhol k stredovému uhlu AEC , a teda má polovičnú veľkosť

$$|\angle ADC| = \frac{|\angle AEC|}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ.$$

V štvoruholníku $ABCD$ je súčet vnútorných uhlov 360° . Pomocou toho dorátame uhol pri vrchole B ako $360^\circ - 35^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 165^\circ$. To je zároveň aj veľkosť vnútorného uhla zadaného pravidelného n -uholníka. Zo vzorca na výpočet veľkosti uhla pravidelného n -uholníka vypočítame n :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} \\ 165^\circ &= \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n} \\ n \cdot 165^\circ &= n \cdot 180^\circ - 360^\circ \\ n \cdot 15^\circ &= 360^\circ \\ n &= 24\end{aligned}$$

Úloha 3.7: Nech x a y sú kladné celé čísla spĺňajúce $2^{13} + 2^{10} + 2^x = y^2$. Nájdite najmenšie vyhovujúce y .

Výsledok: 160

Riešenie: Pozrime sa najprv na súčet $2^{13} + 2^{10}$. Ten si vieme upraviť ako $2^3 \cdot 2^{10} + 2^{10} = 8 \cdot 2^{10} + 2^{10} = 9 \cdot 2^{10}$. Z tohto tvaru môžeme vidieť, že $\sqrt{2^{13} + 2^{10}}$ je celé číslo, konkrétne je to $3 \cdot 2^5 = 96$. Vieme teda, že $y > 96$, keďže 2^x je určite väčšie ako 0. Poďme sa teraz pozrieť na celý súčet.

Upravme si pôvodný súčet do tvaru $2^{10} \cdot (9 + 2^z)$, kde $z = x - 10$. Môžeme si všimnúť, že nám stačí nájsť z tak, že $9 + 2^z$ bude štvorec. Tu sa ako riešenie ponúka 25, kde $2^z = 16$, resp. $z = 4$ (čo vieme dostať umocnením pytagorejskej trojice 3, 4, 5).

Overme ešte, že sa jedná o najmenšie možné riešenie. Jediný štvorec väčší ako 9 a menší ako 25 je 16. No v tom prípade by sa 2^z muselo rovnať 7, v takom prípade by ale z nebolo celé číslo.

Teraz vieme jednoducho dopočítať najmenšie y pomocou nájdeneho najmenšieho x ako

$$y = \sqrt{2^{13} + 2^{10} + 2^{14}} = \sqrt{25 \cdot 2^{10}} = 160.$$

Úloha 3.8: Určte reálne u tak, aby bol súčet prevrátených hodnôt riešení kvadratickej rovnice najväčší možný:

$$u^2x^2 + (u - 3)x + \frac{1}{u + 11} = 0.$$

Výsledok: -4

Riešenie: Najprv podľa známeho vzorca vyjadrime korene kvadratickej rovnice zo zadania, dostaneme:

$$x_{1,2} = \frac{(-u + 3) \pm \sqrt{D}}{2u^2}$$

kde D je diskriminant rovnice a má hodnotu:

$$D = (u - 3)^2 - \frac{4u^2}{u + 11}$$

Vyjadrime si teda súčet prevrátených hodnôt našich koreňov a upravujme:

$$\frac{2u^2}{(-u + 3) + \sqrt{D}} + \frac{2u^2}{(-u + 3) - \sqrt{D}} = 2u^2 \left(\frac{1}{(-u + 3) + \sqrt{D}} + \frac{1}{(-u + 3) - \sqrt{D}} \right)$$

Ďalej upravme zlomky na spoločného menovateľa a sčítajme ich:

$$2u^2 \cdot \frac{(-u + 3) - \sqrt{D} + (-u + 3) + \sqrt{D}}{((-u + 3) + \sqrt{D})((-u + 3) - \sqrt{D})}$$

Všimnime si, že výraz v menovateli odpovedá vzorcu $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Zároveň vieme sčítať rovnaké členy v čitateli a dostaneme tak:

$$2u^2 \cdot \frac{2(-u + 3)}{(-u + 3)^2 - D}$$

Dosaďme teraz do výrazu hodnotu diskriminantu:

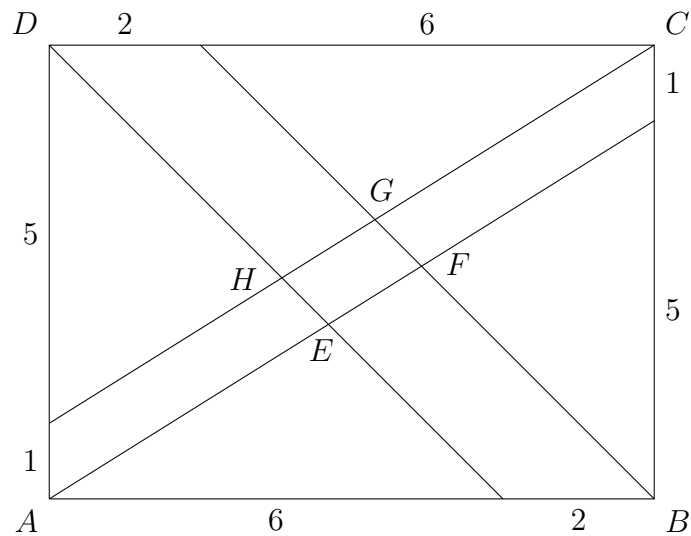
$$2u^2 \cdot \frac{2(-u + 3)}{(-u + 3)^2 - (u - 3)^2 + \frac{4u^2}{u + 11}} = 2u^2 \cdot \frac{2(-u + 3)}{\frac{4u^2}{u + 11}} = 2u^2 \cdot \frac{2(-u + 3)(u + 11)}{4u^2} = (-u + 3)(u + 11)$$

Naším cieľom je teda maximalizovať tento kvadratický výraz. To ide niekoľkými spôsobmi, my použijeme úpravu na štvorec:

$$(-u + 3)(u + 11) = -u^2 - 8u + 33 = -(u + 4)^2 + 16 + 33 = -(u + 4)^2 + 49$$

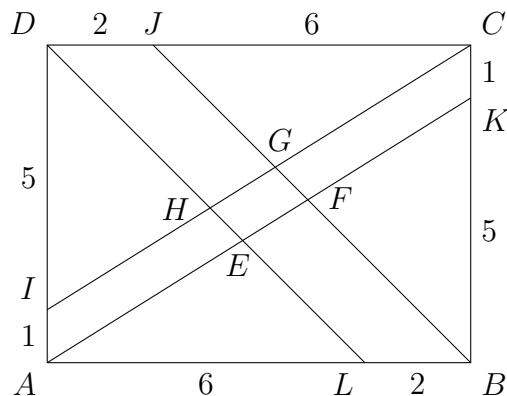
Maximum dosiahneme, keď bude hodnota $(u + 4)^2$ čo najmenšia. Keďže je ale umocnená na druhú, tak nikdy nebude záporná, teda najmenej bude 0, práve keď $u = -4$.

Úloha 3.9: Majme obdĺžnik $ABCD$ s vyznačenými dĺžkami ako na obrázku. Aký je obsah rovnobežníka $EFGH$?



Výsledok: 16/13

Riešenie: Označíme si postupne body I, J, K a L ako na obrázku.



Pre vyjadrenie hľadaného obsahu rovnobežníka $EFGH$ budeme teraz vychádzať z toho, že jeho obsah vieme podľa obrázka vyjadriť ako $S_{EFGH} = S_{ABCD} - S_{ALD} - S_{BCJ} - S_{ELBF} - S_{DHGJ}$. Poďme si postupne vyjadriť všetky obsahy ktoré poznáme:

- Obsah $ABCD$ je $6 \cdot 8 = 48$.
- $\triangle LAD \cong \triangle JCB$ (podľa vety usu). Keďže sú pravouhlé, ich obsah vyjadríme ako $6 \cdot 6/2 = 18$.
- Úsečka AK je rovnobežná s úsečkou CI , obdobne BJ je rovnobežná s DL (ide o predĺženia strán rovnobežníka $EFGH$). Zo zhodnosti $\triangle LAE \cong \triangle JCG$ a tiež $\triangle DHI \cong \triangle BFK$ (podľa vety usu) vidíme, že $|BF| = |DH|$ a obdobne $|LE| = |JG|$. Preto lichobežníky $ELBF$ a $GJDH$ sú zhodné a majú rovnaký obsah (okrem rovnako dlhých strán majú rovnakú výšku). Označme teda ich obsah ako S .

Teraz obsah $EFGH$ vieme vyjadriť ako $S_{ABCD} - S_{ALD} - S_{BCJ} - 2S = 48 - 18 - 18 - 2S = 12 - 2S$.

Pre nájdenie S si najskôr označme S_{ALE} ako x a S_{BFK} ako y .

Najskôr si vyjadríme S pomocou x . Platí, že $\triangle ABF \sim \triangle ALE$ (podľa vety uu) s koeficientom podobnosti $8/6 = 4/3$. Strany aj výšky sa škálujú koeficientom $4/3$, pre obsah teda platí:

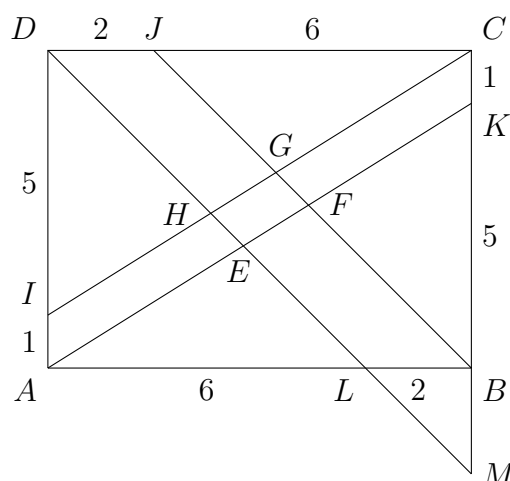
$$S_{ABF} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot S_{ALE} = \frac{16}{9}x.$$

Z obrázka vidíme, že potom platí

$$S = S_{ABF} - S_{ALE} = \frac{16}{9}x - x = \frac{7}{9}x.$$

Teraz vyjadríme S pomocou y . Najprv predĺžime úsečky KB a EL a ich priesečník označíme M . $\sphericalangle BML = 45^\circ$, keďže je súhlasný s $\sphericalangle KBF$, teda $\triangle BML$ je rovnoramenný, pravouhlý s odvesnami o veľkosti 2, teda jeho obsah je $2 \cdot 2/2 = 2$. Vidíme, že podľa vety uu je $\triangle KEM \sim \triangle KFB$ s koeficientom podobnosti $7/5$, teda

$$S_{KEM} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 \cdot S_{KFB} = \frac{49}{25}y.$$



Teraz si už vieme vyjadriť S ako

$$S = S_{KEM} - S_{KFB} - S_{BML} = \frac{49}{25}y - y - 2 = \frac{24}{25}y - 2.$$

Porovnaním vyjadrení pre obsah S dostávame:

$$\frac{7}{9}x = \frac{24}{25}y - 2.$$

Súčasne platí $S_{ABK} = x + S + y = x + \frac{7}{9}x + y = \frac{16}{9}x + y$ a tiež $S_{ABK} = 8 \cdot 5/2 = 20$, máme teda:

$$\frac{16}{9}x + y = 20.$$

Vytvorili sme teda sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych. Z druhej rovnice si vyjadríme y ako $y = 20 - \frac{16}{9}x$ a dosadíme do prvej. Dostávame:

$$\frac{7}{9}x + \frac{24}{25} \cdot \frac{16}{9}x = -2 + \frac{24}{25} \cdot 20.$$

Teraz vyjadríme x s využitím ekvivalentných úprav ako:

$$x = \frac{90}{13}$$

Ako sme uviedli vyššie, obsah S vieme vyjadriť podľa x ako:

$$S = \frac{7}{9}x = \frac{70}{13}$$

Konečne teda môžeme vyjadriť hľadaný obsah rovnobežníka $EFGH$ podľa rovnice uvedenej vyššie ako:

$$S_{EFGH} = 12 - 2 \cdot \frac{70}{13} = \frac{156 - 140}{13} = \frac{16}{13}$$

Úloha 3.10: Na párty občas 7 alebo 15 ľudí odíde do vedľajšej miestnosti, kde každý každému daruje darček. Všetci ľudia okrem mňa už v súčte darovali 1994 darčkov. Najmenej koľkokrát som šla do vedľajšej miestnosti ja?

Výsledok: 8

Riešenie: Pozrime sa, koľko darčkov sa daruje, keď ľudia odídu do vedľajšej miestnosti. Ak ich odíde 7, tak každý z nich daruje 6 darčkov, teda dokopy $7 \cdot 6 = 42$. Ak ich odíde 15, každý daruje 14, teda dokopy $15 \cdot 14 = 210 = 5 \cdot 42$. Obe hodnoty sú násobkom 42, teda aj celkový počet darovaných darčkov je násobkom 42.

Najmenší násobok 42, ktorý je aspoň 1994 je $2016 = 48 \cdot 42$. Aby bol celkový počet darčkov 2016, musela by som ja darovať dokopy $2016 - 1994 = 22$ darčkov. Keď odídem do vedľajšej miestnosti, darujem tam buď 6 alebo 14 darčkov. Súčet 22 sa ale nedá zložiť z čísel 6 a 14, preto nemohlo byť darčkov dokopy 2016.

Najbližší násobok 42 väčší ako 2016 je $2058 = 49 \cdot 42$. Aby bol celkový počet darčkov 2058, musela som ja darovať dokopy $2058 - 1994 = 64$ darčkov. 64 sa už dá vyjadriť ako $6 \cdot 6 + 2 \cdot 14$, čo odpovedá tomu, že som 8-krát šla do vedľajšej miestnosti. Inak sa už číslo 64 takýmto spôsobom vyjadriť nedá, keďže nie je násobkom 6, ani $64 - 14 = 50$ nie je násobkom 6, ani $64 - 3 \cdot 14 = 22$, ani $64 - 4 \cdot 14 = 8$ a väčšie násobky 14 sa už do 64 nezmestia.

Ak by sme skúmali väčšie násobky 42 ako 2058, stále by som menej ako 8-krát do vedľajšej miestnosti ísť nemohla, keďže potom by som dokopy darovala najviac $7 \cdot 14 = 98$ darčkov, teda by všetkých darčkov dokopy bolo najviac $1994 + 98 = 2092$, čo je menej ako najbližší násobok 42, číslo 2100. 8 je teda riešením úlohy.

Úloha 3.11: Nech P a Q sú kvadratické polynómy s koeficientom 1 pri kvadratických členoch také, že $P(-1)/Q(-1) = P(1)/Q(1) = 3/2$ a $Q(6) = 5$. Koľko je $P(6)$?

Výsledok: -10

Riešenie: Pomenujme si zvyšné koeficienty našich polynómov reálnymi číslami a, b, k, l tak, aby platilo:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 + ax + b \\ Q(x) &= x^2 + kx + l \end{aligned}$$

Dosaďme do oboch polynómov hodnoty -1 a 1 a napíšme si rovnosti zo zadania:

$$\begin{aligned} \frac{P(-1)}{Q(-1)} &= \frac{1 - a + b}{1 - k + l} = \frac{3}{2} \\ \frac{P(1)}{Q(1)} &= \frac{1 + a + b}{1 + k + l} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Obe rovnosti prenásobme tak, aby sme sa zbavili zlomkov, dostaneme:

$$\begin{aligned}2 - 2a + 2b &= 3 - 3k + 3l \\2 + 2a + 2b &= 3 + 3k + 3l\end{aligned}$$

Odčítaním prvej rovnosti od druhej dostávame vyjadrenie:

$$\begin{aligned}4a &= 6k \\ \frac{2a}{3} &= k\end{aligned}\tag{1}$$

Sčítaním oboch rovností zase vyjadrenie:

$$\begin{aligned}4 + 4b &= 6 + 6l \\ 4b - 2 &= 6l \\ \frac{2b - 1}{3} &= l\end{aligned}\tag{2}$$

Druhé tvrdenie zo zadania nám hovorí, že $Q(6) = 5$, teda nám po dosadení dáva rovnosť:

$$36 + 6k + l = 5$$

Naším cieľom teraz bude upraviť ľavú stranu tejto rovnosti do výrazu rovnému hľadanému $P(6)$. Začnime dosadením vyjadrení (1) a (2) a potom ďalej upravujeme:

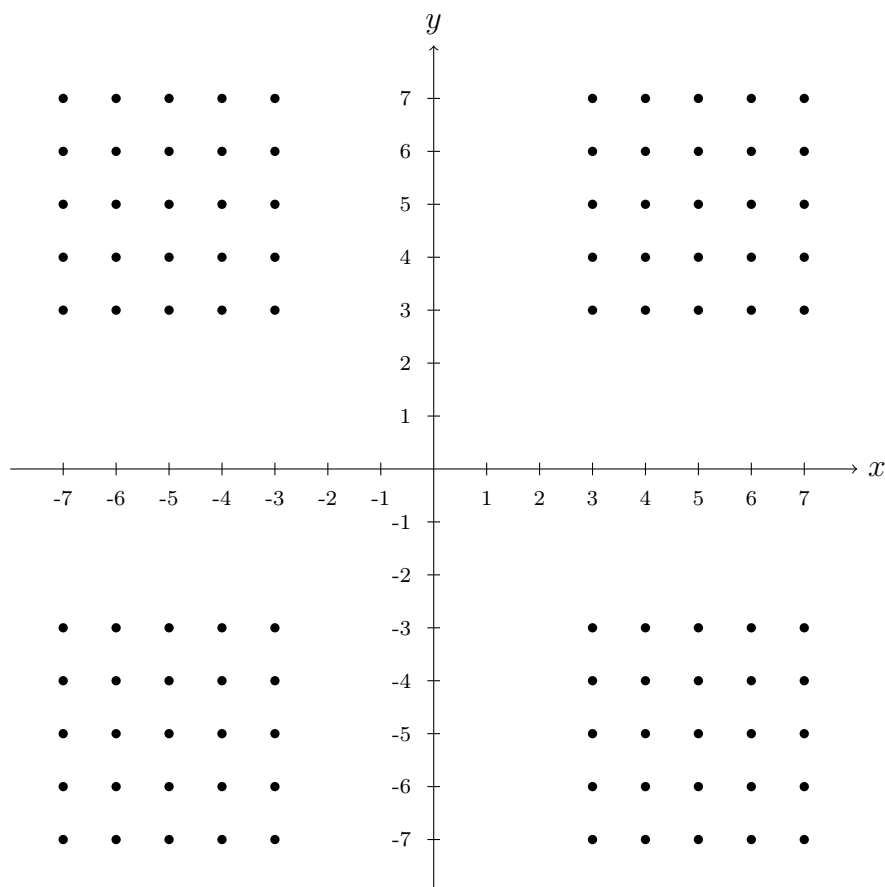
$$\begin{aligned}36 + 6 \cdot \frac{2a}{3} + \frac{2b - 1}{3} &= 5 \\ 108 + 12a + 2b - 1 &= 15 \\ 92 + 12a + 2b &= 0 \\ 46 + 6a + b &= 0 \\ 36 + 6a + b &= -10\end{aligned}$$

Na ľavej strane sme naozaj dostali práve vyjadrenie $P(6)$, preto platí, že $P(6) = -10$.

Úloha 3.12: Množina G obsahuje body s celočíselnými súradnicami (x, y) takými, že $3 \leq |x| \leq 7$ a $3 \leq |y| \leq 7$. Koľko štvorcov so stranou dĺžky aspoň 6 má všetky vrcholy v množine G ?

Výsledok: 225

Riešenie: Zadaná množina vyzerá nasledovne:



Vidíme, že sa skladá zo štyroch častí, pričom každá je v inom kvadrante.

V rámci jedného kvadrantu nevieme vytvoriť žiadny štvorec, pretože najväčšia vzdialenosť v jednej časti je $\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} < \sqrt{36} = 6$.

Pozrime sa na nejaký vyhovujúci štvorec $ABCD$. Nech bod A tohto štvorca má súradnice (x, y) . Povedzme, že bod B je vzdialený od A vzdialenosť a v smere x -ovej osi a b v smere y -ovej osi, teda má súradnice $(x + a, y + b)$. Následne druhá strana musí byť na tú prvú kolmá, takže bod C je vzdialený $-b$ v x -ovom smere a a v y -ovom smere od bodu B . Výsledný bod na opačnom konci uhlopriečky ako A má teda súradnice $(x + a - b, y + b + a)$. Stred štvorca vieme nájsť priemerom súradníc bodu A a bodu C :

$$S_x = \frac{(x) + (x + a - b)}{2}$$

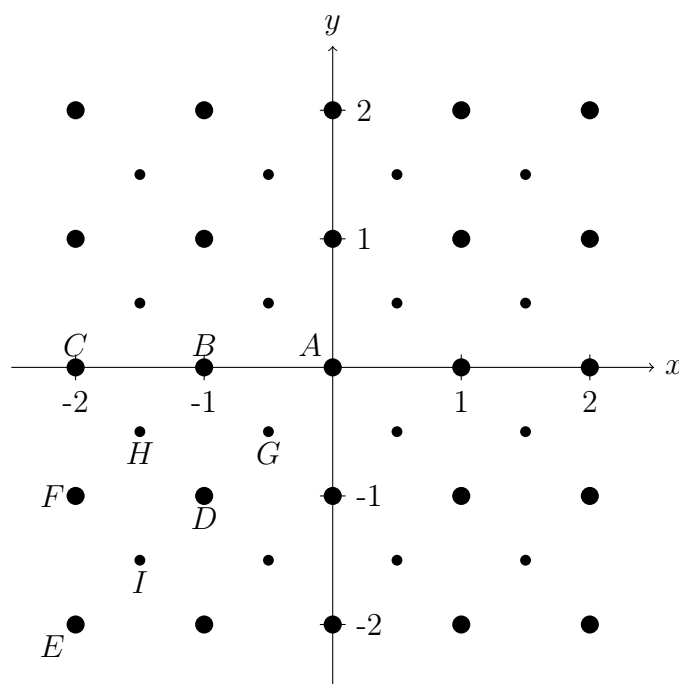
$$S_x = x + \frac{a - b}{2}$$

$$S_y = \frac{(y) + (y + b + a)}{2}$$

$$S_y = y + \frac{a + b}{2}$$

Vidíme, že priesečník uhlopriečok je buď celočíselný bod, ak a aj b majú rovnakú paritu, alebo je to stred malého štvorčeka súradnicovej siete, ak a a b majú rôznu paritu.

Uvažujme teda všetky rôzne možné priesečníky uhlopriečok nášho hľadaného štvorca $ABCD$:



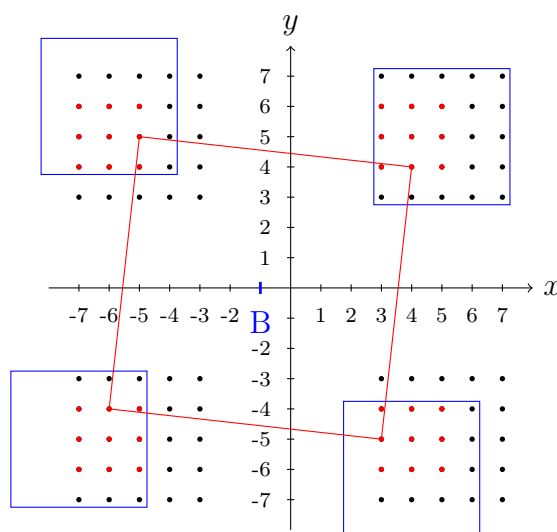
Okrem tých vyznačených bodmi na obrázku už ďalšie možné stredy neexistujú. Keby bola nejaká súradnica stredy v absolútnej hodnote väčšia ako 2, v opačnom smere od bodu $(0,0)$ by musel byť bod štvorca A vzdialený od stredu štvorca viac ako 5, a teda bod C by v tej istej súradnici musel byť od stredu tiež vzdialený o viac ako 5, ale v opačnom smere, a teda v tom smere by mal absolútnu hodnotu súradnice väčšiu ako 7, teda by nemohol byť z množiny G .

Tieto body si vieme rozdeliť do 9 kategórií podľa vzdialenosti od stredu súradnicovej sústavy a pre každú kategóriu spočítať, koľkým štvorcom nejaký bod z nej tvorí stred. Ostatné body z tej danej vzdialenosti od stredu $(0,0)$ budú stredmi rovnako veľa štvorcov, lebo množina G je rotačne symetrická podľa bodu $(0,0)$.

• bod A

Nech je bod $(0,0)$ stredom nášho hľadaného štvorca a nech nejaký bod $(a,b) \in G$ z prvého kvadrantu je jedným z vrcholov štvorca. Ostatné body dostaneme otočením tohto bodu o 90° , 180° a 270° okolo bodu $(0,0)$. Tieto body budú $(-b,a)$, $(-a,-b)$, $(b,-a)$. Ak boli čísla a aj b z rozmedzia od 3 do 7, tak aj ostatné vrcholy budú v príslušných kvadrantoch v správnom rozmedzí, a teda aj v množine G . Pre každý vrchol z G z prvého kvadrantu teda bod $(0,0)$ tvorí stred práve jedného štvorca. Dokopy teda bod A tvorí okolo seba **25** štvorcov.

- **kategória B (4 body)** Zoberme body z prvého kvadrantu a zistíme, kam sa zobrazia po rotáciách o 90° , 180° a 270° :



Vidíme, že len 9 bodov po rotáciách zostane stále v množine G . Body s x -ovou súradnicou 6 alebo 7 sa po rotácii o 180° zobrazia vľavo od množiny G , body so súradnicou y -ovou 3 sa zobrazia pri otočení o 270° na body s x -ovou súradnicou 2, teda mimo množiny G . Podobne sa body s x -ovou súradnicou 7 zobrazia mimo množiny G pri otočení o 90° stupňov. Zostane len **9** bodov, ktoré môžu tvoriť štvorec a každý z nich aj štvorec so stredom v bode $(-1, 0)$ vytvorí.

Keďže množina G je symetrická vzhľadom ku štyrom kvadrantom, tak body $(0, -1)$, $(1, 0)$ aj $(0, 1)$ sú tiež stredmi deviatich rôznych štvorcov.

- **kategória C (4 body)**

Keď sa zobrazí podobne ako v predchádzajúcom odseku štvorec v prvom kvadrante podľa stredy rotácie $(-2, 0)$, tak vidíme, že pri rotácii o 180° sa zobrazí na štvorec s rohmi $(-5, -3)$ a $(-9, -7)$, teda jediné body, čo môžu tvoriť z prvého kvadrantu štvorec, sú body od $(3, 3)$ do $(3, 7)$, ktoré následne osekajú, podobne ako v **B**-čku, rotácie o 90° a 270° . Zostane teda **jediný** bod $(3, 5)$, ktorý bude tvoriť s inými bodmi štvorec so stredom v bode **C**.

- **kategória G (4 body)** Štvorec s rohmi $(3, 3)$ a $(7, 7)$ sa zobrazí podľa otočenia podľa stredy **G** o 180° na štvorec s rohmi $(-4, -4)$ a $(-8, -8)$. Teda okrajové body s aspoň jednou súradnicou 7 sa zobrazia mimo množiny G . Ostatných **16** bodov z prvého kvadrantu bude tvoriť štvorec, lebo otočenia o 90° a 270° už nič neokresajú. Za každý z bodov tejto kategórie bude môcť existovať 16 štvorcov s príslušným stredom.

- **kategória D (4 body)**

Štvorec s rohmi $(3, 3)$ a $(7, 7)$ sa zobrazí podľa otočenia podľa stredy **D** o 180° na štvorec s rohmi $(-5, -5)$ a $(-9, -9)$. Teda okrajové body s aspoň jednou súradnicou 6 alebo 7 sa zobrazia mimo množiny G . Otočenia o iné uhly, podobne ako v predošlom prípade, nič neokrešú, teda nám zostane **9** bodov, ktoré budú môcť tvoriť štvorec so stredom **D**.

- **kategória I (4 bodov)**

Štvorec s rohmi $(3, 3)$ a $(7, 7)$ sa zobrazí podľa otočenia podľa stredy **I** o 180° na štvorec s rohmi $(-6, -6)$ a $(-10, -10)$, podobne ako v minulom prípade. Zostanú nám teraz iba **4** body, ktoré budú tvoriť štvorce so stredmi v **I**.

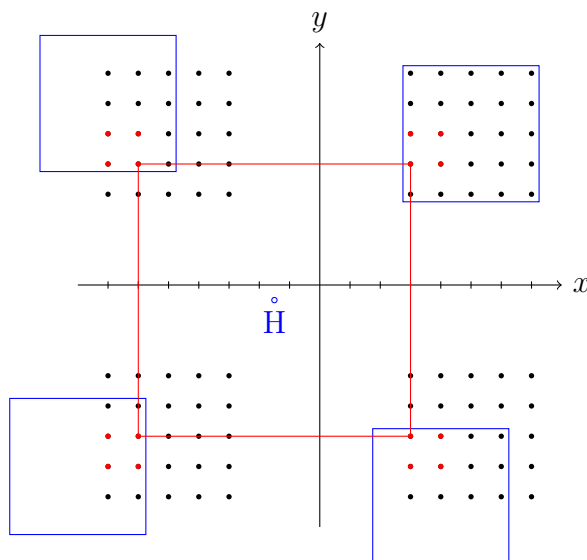
- **kategória E (4 body)**

Štvorec s rohmi $(3, 3)$ a $(7, 7)$ sa zobrazí podľa otočenia podľa stredy **E** o 180° na štvorec s rohmi $(-7, -7)$ a $(-11, -11)$. Jediný bod, ktorý sa teda nezobrazí mimo množinu G , bude

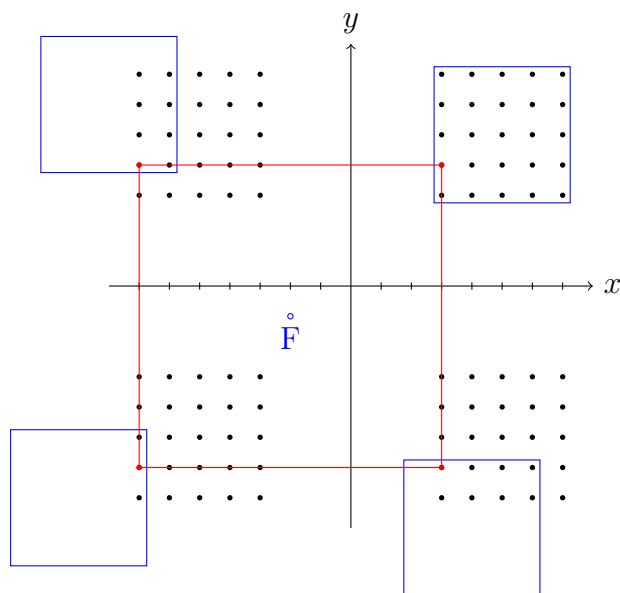
teda bod $(3, 3)$, ktorý bude spolu s bodmi $(-7, 3)$, $(-7, -7)$ a $(3, -7)$ bude tvoriť **jediný** štvorec so stredom v **E**.

- **kategória H (8 bodov)**

Podobne ako v **B**-čku sa nám odseknú z rôznych strán skoro všetky okrem **4** potenciálnych štvoríc bodov:



- **kategória F (8 body)** Vyhovuje **jediný** štvorec. Všetky ostatné body z prvého kvadrantu sa zobrazia mimo množinu G v aspoň jednej rotácii:



Zhrnutie:

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>
počet bodov v kategórii	1	4	4	4	4	8	4	8	4
štvorcov s daným stredom	25	9	1	9	1	1	16	4	4
dokopy	25	36	4	36	4	8	64	32	16

Keď sčítame počty štvorcov zapísané v štvrtom riadku, tak zistíme, že dokopy existuje 225 štvorcov v množine G , ktoré majú všetky strany dĺžky aspoň 6.



autori: Viliam Geffert, Bianka Gurská, Gertrúda Matej Hanusová, Miriam Horváthová, Branislav Ječim, Martin Kopčány, Matúš Libák, Matúš Masrna, Martin Mihálik, Lujza Milotová, Kristína Mišlanová, Erik Novák, Natália Poliačiková, Ján Richnavský, Martin Šmilňák, Ľubomír Vargovčík, Štefan Vašak, Richard Vodička

recenzia a úprava: Matúš Masrna, Lujza Milotová, Patrik Paľovčík

názov: **Košický Matboj – 24. 10. 2025**

vydavatelia: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta
Združenie STROM

web: strom.sk/strom/akcie/matboj