STROM

Lomihlav

Košice, 20.11.2026

Úlohy

Úloha 1:

Jašter Paťo má telo dĺžky 40 cm, z čoho 10 cm tvorí chvost. Paťo sa ale zľakol, a tak mu odpadol chvost. To ho ešte viac vystrašilo, a tak sa schúlil na polovičnú dĺžku. Akú má teraz Paťo dĺžku?

Výsledok: 15 cm

Riešenie:

Keďže Paťovi chvost odpadol, odčítame jeho dĺžku a dostaneme 40 cm − 10 cm = 30 cm. Potom sa schúlil na polovicu, vydeľme preto výsledok dvojkou a získame terajšiu Paťovu dĺžku, teda 30 cm : 2 = 15 cm.

Úloha 2:

Šesť drevorubačov stojí v rade – Alexander, Dano, Jano, Kim, Lota a Peter. Medzi Danom a Alexandrom sú traja drevorubači, medzi Alexandrom a Janom sú dvaja drevorubači a medzi Janom a Kim jeden drevorubač. Kim nie je ani na jednom kraji tohto radu. Koľko drevorubačov je medzi Lotom a Petrom?

Výsledok: 2

Riešenie:

Po tom, čo sa Dano a Alexander postavia s troma voľnými miestami medzi nimi, sa Jano od Alexandra nemôže postaviť na opačnú stranu ako Dano, pretože to by znamenalo, že miest by muselo byť aspoň 8 a nie 6. Preto sú Jano a Dano vedľa seba, Jano bližšie k Alexandrovi. Keďže medzi Kim a Janom musí stáť jeden drevorubač, tak medzi nimi buď môže byť Dano, alebo môže byť Kim vedľa Alexandra. Ak by ale bol medzi nimi Dano, tak by Kim ostala na okraji, lebo Lota a Peter by museli byť na voľných miestach medzi Janom a Alexandrom. Teda Kim musí byť medzi Alexandrom a Janom, bližšie k Alexandrovi. Z dvojice Lota a Peter potom jeden bude medzi Kim a Janom a druhý na niektorom okraji. Bez ohľadu na to, na ktorom okraji bude stáť ten druhý, vždy budú medzi nimi stáť práve dvaja drevorubači.

Úloha 3:

Kim sa počas prázdnin nudila, tak vzala číslo 20 a začala s ním vykonávať nasledujúcu operáciu: ak je číslo deliteľné 5 bez zvyšku, Kim ho vydelí 5, ak číslo nie je deliteľné 5, Kim k nemu pripočíta 3. Po prvej operácii teda Kim dostala 4, po druhej 7, po tretej 10 atď. Aké číslo dostane Kim po 2026 operáciách?

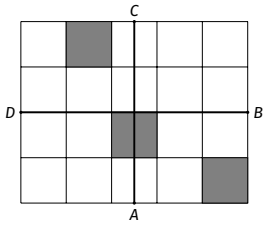
Výsledok: 2

Riešenie:

Po 2026 operáciách bude mať Kim napísaných 2027 čísel. Najprv sa pozrime na prvých niekoľko čísel, ktoré Kim napísala: 20, 4, 7, 10, 2, 5, 1, 4, 7, ... Teraz si môžeme všimnúť, že skupina šiestich čísel 4, 7, 10, 2, 5, 1 sa nám bude stále opakovať. Keďže ako prvé napísala číslo 20, ktoré do našej skupiny nerátame, lebo sa neopakuje, odčítajme ho a zostane nám 2027 − 1 = 2026 čísel. Pozrime sa, koľkokrát bude naša skupina celá napísaná v prvých 2026 číslach, teda vydeľme 2026 : 6 = 337 zv. 4. To znamená, že Kim napíše 337 ráz celú šesticu čísel a napokon dopíše ešte prvé štyri z nich. Posledné napísané číslo teda bude štvrté číslo tejto skupiny, čo je 2.

Úloha 4:

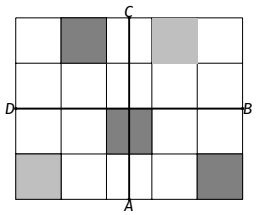
V obdĺžniku znázornenom nižšie sú vyfarbené 3 jednotkové štvorce. Body A, B, C, D sú stredmi prislúchajúcich strán obdĺžnika. Dano dofarbil niektoré ďalšie štvorce. Keď prehol obdĺžnik pozdĺž úsečky AC, tak všetky vyfarbené oblasti sa prehli na vyfarbené oblasti. Potom rozložil útvar naspäť a prehol útvar pozdĺž úsečky BD. Po tomto prehnutí sa vyfarbené oblasti taktiež prehli len na vyfarbené. Aký je najmenší možný počet ďalších jednotkových štvorcov, ktoré Dano dofarbil?



Výsledok: 7

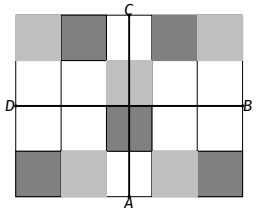
Riešenie:

Po prvom prehnutí pozdĺž úsečky AC museli byť k pôvodným štvorčekom dofarbené aj tieto dva ďalšie, aby sa každý ofarbený prehol na ofarbený.



sivou sú znázornené dofarbené štvorčeky

Na to, aby sa každý z piatich už ofarbených štvorčekov prehol na ofarbený aj po prehnutí pozdĺž úsečky BD, musel Dano ofarbiť aj týchto ďalších 5 štvorčekov.



Teraz sa už každý ofarbený štvorček prehne len na ofarbený štvorček po prehnutí obdĺžnika pozdĺž oboch úsečiek, teda dokopy musel Dano dofarbiť 2 + 5 = 7 štvorčekov.

Úloha 5:

Generál Lota má na tabuli napísané 3 kladné celé čísla. Súčet prvých dvoch je 707 a súčet druhého a tretieho je 700. Určte najmenšiu možnú hodnotu prvého čísla.

Výsledok: 8

Riešenie:

Súčet druhého a tretieho čísla je 700, a keďže tretie číslo je aspoň 1, druhé je najviac 699. Súčet prvého a druhého čísla, ktoré je najviac 699, je 707, preto musí byť prvé číslo aspoň 8. Ak je prvé číslo 8, druhé číslo 699 a tretie číslo 1, tak sú obidve podmienky splnené, teda 8 je najmenšia možná hodnota prvého čísla.

Úloha 6:

Drevorubač Dano napísal na tabuľu nenulovú cifru. Následne pripísal inú cifru na koniec tak, aby výsledné číslo bolo deliteľné dvomi. Opäť pripísal novú cifru na koniec tak, aby výsledné číslo bolo deliteľné tromi. Takto napísal 9 rôznych cifier, pričom po pripísaní každej cifry na koniec bolo výsledné číslo deliteľné počtom cifier. Akú cifru nenapísal? Nájdite všetky možnosti.

Výsledok: 0 alebo 9

Riešenie:

Zo zadania vieme, že výsledné číslo je deväťciferné, a teda je deliteľné 9. Aby nejaké číslo bolo deliteľné 9, musí byť aj jeho ciferný súčet deliteľný 9. Pozrime sa na súčet všetkých cifier:

$$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$$

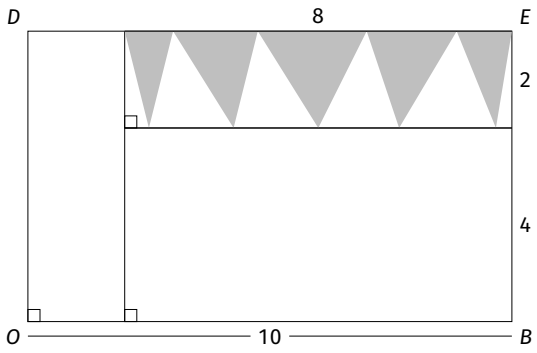
Tento súčet je deliteľný 9. Cifier ale existuje 10 a my potrebujeme vybrať len 9 z nich. To znamená, že cifra, ktorú nevyberieme, je tiež deliteľná 9, aby aj po jej odčítaní zostal ciferný súčet deliteľný 9. Takýmito ciframi sú iba 0 a 9, iba tie dve mohol teda Dano nenapísať.

Takéto čísla naozaj vieme aj vytvoriť:

- ak vynecháme cifru 0, vieme vytvoriť číslo 381654729
- ak vynecháme cifru 9, vieme vytvoriť číslo 783204165

Úloha 7:

Tácka drevorubača Dana na obede v jedálni má tvar obdĺžnika. Aká časť obdĺžnika $OBED$ na obrázku je sivá? Odpoveď vyjadrite zlomkom.



Výsledok: $\frac{2}{15}$

Riešenie:

Začnime tým, že spočítame obsah sivej časti tácky. Všimnime si, že všetky sivé trojuholníky majú rovnakú výšku, konkrétne 2. Súčet dĺžok ich základní ležiacich na úsečke ED je 8. Obsah trojuholníka vypočítame ako polovicu súčinu veľkostí výšky a základne. Súčet obsahov sivých trojuholníkov preto vieme vyrátať ako polovicu súčinu výšky (je pre všetky rovnaká) a súčtu dĺžok základní týchto trojuholníkov, čo je $\frac{8 \cdot 2}{2}$, čiže 8.

Obsah obdĺžnika $OBED$ je $10 \cdot (4 + 2) = 60$. Sivá časť preto pokrýva $\frac{8}{60} = \frac{2}{15}$.

Úloha 8:

Po strome za sebou lezie 101 lykožrútov očíslovaných odspodu nahor číslami 1 až 101, pričom niektorí z nich vždy hovoria pravdu a ostatní vždy klamú. Prvý, tretí, piaty, ..., 99. a 101. lykožrút, teda každý lykožrút s nepárnym číslom, povie: „Všetci lykožrúti nado mnou klamú“ a druhý, štvrtý, šiesty, ..., 98. a 100. lykožrút, teda každý lykožrút s párnym číslom, povie: „Všetci lykožrúti podo mnou klamú.“ Najviac koľko lykožrútov na strome môže hovoriť pravdu?

Výsledok: 2

Riešenie:

Rozdeľme si lykožrútov na tých s párnym poradovým číslom a tých s nepárnym poradovým číslom. Vyberme si nejakého nepárneho lykožrúta a povedzme si, že hovorí pravdu. Tento lykožrút teda pravdivo hovorí: „Všetci lykožrúti nado mnou klamú.“ Pozrime sa na nepárnych lykožrútov pod naším lykožrútom. Každý z nich hovorí: „Všetci lykožrúti nado mnou klamú.“ My vieme, že je nad nimi náš lykožrút, ktorý hovorí pravdu. Všetci títo lykožrúti preto klamú. Ak teda máme jedného nepárneho lykožrúta, ktorý hovorí pravdu, tak platí, že všetci lykožrúti nad ním a všetci nepárni lykožrúti pod ním klamú. Preto môže existovať iba jeden nepárny lykožrút, ktorý hovorí pravdu.

A teraz sa podobne pozrieme na párnych lykožrútov. Ak máme nejakého párneho lykožrúta, ktorý hovorí pravdu, rovnakým spôsobom môžeme ukázať, že všetci lykožrúti pod ním a všetci párni lykžrúti nad ním klamú. Teda rovnako môže existovať maximálne jeden párny lykožrút, ktorý hovorí pravdu. To znamená, že môžu existovať najviac dvaja lykožrúti, ktorí hovoria pravdu. Tento počet vieme naozaj docieliť, ak hovoria pravdu lykožrúti s číslami 101 a 2.

Úloha 9:

Alexander dlží štyrom ľuďom nejaké sumy peňazí. Všetky tieto sumy sú dvojciferné prvočísla, ktoré spolu obsahujú všetky cifry okrem 0 a 5. Akú sumu dlží Alexander všetkým štyrom dokopy?

Výsledok: 220

Riešenie:

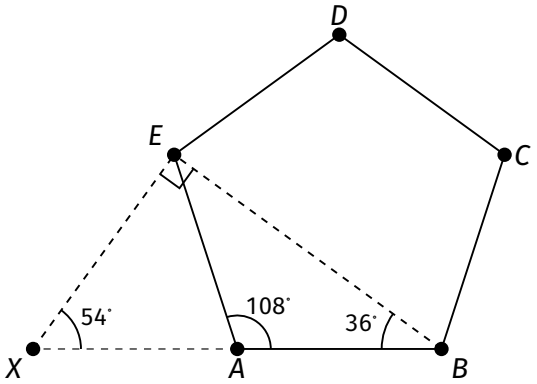
Zo zadania vyplýva, že Alexander použil cifry $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9$. Na výber mal štyri párne cifry a štyri nepárne cifry. Všetky dvojciferné párne čísla sú deliteľné 2, čiže nie sú prvočísla. Preto sa musia cifry $2, 4, 6, 8$ nachádzať na miestach desiatok jednotlivých súm, ktoré Alexander dlží. Na miestach jednotiek sa potom budú nachádzať cifry $1, 3, 7, 9$. Keďže potrebujeme zistiť súčet všetkých dlžených súm, netreba zisťovať jednotlivé čiastky, teda môžeme rovno sčítať všetky desiatky a všetky jednotky. Z toho vyplýva, že Alexander dokopy dlží $20 + 40 + 60 + 80 + 1 + 3 + 7 + 9 = 220$ peňazí.

Úloha 10:

Dano odpisuje vodomer tvaru pravidelného päťuholníka $ABCDE$. Nech X je bod na priamke AB taký, že priamka XE je kolmá na priamku BE. Aká je veľkosť uhla AXE?

Výsledok: 54°

Riešenie:



Na začiatok si vypočítame veľkosť vnútorného uhla v pravidelnom 5-uholníku pomocou vzorca $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$, kde n je počet vrcholov. Teda veľkosť uhla BAE je $\frac{(5-2)\cdot 180°}{5} = 108°$. Úsečky AB a AE sú strany pravidelného päťuholníka, preto platí $|AB| = |AE|$. Z toho vyplýva, že trojuholník ABE je rovnoramenný, a preto sú jeho uhly pri základni BE rovnaké:

$$|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle AEB| = \frac{180° - 108°}{2} = 36°$$

Bod X leží na predĺžení strany AB ako na obrázku. Podľa zadania je priamka XE kolmá na BE, čo znamená, že trojuholník XBE je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole E. Súčet ostrých uhlov v pravouhlom trojuholníku XBE je 90°, teda $|\sphericalangle EXB| + |\sphericalangle XBE| = 90°$. Keďže uhol XBE je totožný s uhlom ABE, teda $|\sphericalangle ABE| = 36°$, tak po dosadení dostávame:

$$|\sphericalangle EXB| = 90° - 36° = 54°$$

Keďže bod A leží na úsečke XB, uhol AXE je totožný s uhlom EXB, a teda $|\sphericalangle AXE| = 54°$.

Úloha 11:

Starý Jano kráča po dedine a všíma si čísla domov, ktoré sú trojciferné. Pre každé číslo, ktoré si všimol, platí, že jeho cifry sú usporiadané zľava doprava tak, že každá ďalšia cifra je menšia alebo rovnaká ako predchádzajúca. Koľko najviac domov si mohol všimnúť?

Výsledok: 219

Riešenie:

Všimnime si, že hneď ako vyberieme cifry v čísle domu, je len jedna možnosť, ako ich usporiadať tak, aby každá ďalšia cifra bola menšia alebo rovnaká ako predchádzajúca. Preto nám stačí spočítať len počet možností, ako vybrať tri cifry čísla domu. Rozoberme tri možnosti:

- Ak sú všetky tri cifry rôzne, máme 10 možností na voľbu prvej z nich, 9 možností na voľbu druhej z nich a 8 možností na poslednú voľbu. Týmto spôsobom dostaneme $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ možností. Každú z nich sme však započítali šesťkrát, keďže existuje $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ poradí, v akom sme mohli tri konkrétne cifry vybrať. Tu máme preto len $720 : 6 = 120$ možností. Každá z nich bude trojciferné číslo, keďže bude určite obsahovať nejakú nenulovú cifru, a tak prvá cifra nebude nula.

- Ak sú dve cifry rovnaké, tak máme 10 možností na opakujúcu sa cifru a pre každú z nich 9 možností pre druhú cifru, teda spolu 90 možností. Opäť sme určite vybrali aj nejakú nenulovú cifru, dostávame teda určite trojciferné čísla po zoradení cifier.
- Ak sú všetky tri cifry rovnaké, tak nemôžeme zvoliť tri nuly, keďže potom nám nevznikne trojciferné číslo domu. Zvyšných 9 cifier môžeme zvoliť, máme teda 9 možností.

Spolu tak existuje $120+90+9 = 219$ rôznych čísel spĺňajúcich vlastnosť, ktorú si Starý Jano všimol, a tak nemohol vidieť viac domov.

Úloha 12:

Drevorubač Ambrózy si zamkol náradie do šopky na špeciálny sedemciferný kód nezačínajúci nulou. Chce taký kód, pre ktorý platí, že je zostavený z ľubovoľných cifier, ktoré sa môžu opakovať, a každá okrem prvých dvoch cifier vznikne odčítaním cifry jednu pozíciu pred ňou od cifry dve pozície pred ňou (teda ak sú napríklad prvé dve cifry 9 a 7, tretia cifra je 2 a štvrtá 5). Aké sú všetky možné hodnoty jeho kódu?

Výsledok: 8532110, 5321101

Riešenie:

Označme si cifry kódu zľava doprava ako A, B, C, D, E, F, G. Teraz si postupne prejdeme možnosti, ako by kód mohol vyzerať, a to tak, že si zvolíme posledné dve cifry a od nich postupne dorátame zvyšok kódu.

Začneme dosadením najmenšej cifry, nuly.

- Ak by cifry G aj F boli 0, cifra E by tiež musela byť 0, pretože zo zadania vieme, že $E - G = F$, takže $E - 0 = 0$. Rovnako by to platilo aj pre zvyšné cifry, teda kód by vyzeral ako 0000000, čo je v spore so zadaním.
- Ak by cifra G bola 0 a cifra F bola 1, zvyšné cifry by sme si dorátali nasledovne:
  $E - F = G \rightarrow E - 1 = 0 \rightarrow E = 1$
  $D - E = F \rightarrow D - 1 = 1 \rightarrow D = 2$
  $C - D = E \rightarrow C - 2 = 1 \rightarrow C = 3$
  $B - C = D \rightarrow B - 3 = 2 \rightarrow B = 5$
  $A - B = C \rightarrow A - 5 = 3 \rightarrow A = 8$
  Kód by teda bol 8532110
- Ak by cifra G bola 0 a cifra F bola 2, zvyšné cifry by sme si dorátali nasledovne:
  $E - F = G \rightarrow E - 2 = 0 \rightarrow E = 2$
  $D - E = F \rightarrow D - 2 = 2 \rightarrow D = 4$
  $C - D = E \rightarrow C - 4 = 2 \rightarrow C = 6$
  $B - C = D \rightarrow B - 6 = 4 \rightarrow B = 10$, a keďže takto veľká cifra neexistuje, pre túto možnosť neexistuje kód a neexistuje ani pre žiadne ďalšie, kde by cifra G bola 0 a cifra F väčšia ako 1, pretože by nastal rovnaký problém, keďže by sme pripočítavali aspoň rovnako veľké čísla.

Teraz za cifru G dosadíme 1.

- Ak by cifra F bola 0, zvyšné cifry by sme si dorátali nasledovne:
  $E - F = G \rightarrow E - 0 = 1 \rightarrow E = 1$
  $D - E = F \rightarrow D - 1 = 0 \rightarrow D = 1$
  $C - D = E \rightarrow C - 1 = 1 \rightarrow C = 2$

$B - C = D \rightarrow B - 2 = 1 \rightarrow B = 3$
$A - B = C \rightarrow A - 3 = 2 \rightarrow A = 5$
Kód by teda bol 5321101

- Ak by cifra F bola 1, zvyšné cifry by sme si dorátali nasledovne:
  $E - F = G \rightarrow E - 1 = 1 \rightarrow E = 2$
  $D - E = F \rightarrow D - 2 = 1 \rightarrow D = 3$
  $C - D = E \rightarrow C - 3 = 2 \rightarrow C = 5$
  $B - C = D \rightarrow B - 5 = 3 \rightarrow B = 8$
  $A - B = C \rightarrow A - 8 = 5 \rightarrow A = 13$, a keďže takto veľká cifra neexistuje, tento kód nie je možný a ani žiadne ďalšie, kde by cifra G bola 1 a cifra F väčšia ako 0, pretože by opäť nastal rovnaký problém, keďže by sme pripočítavali aspoň rovnako veľké čísla.

Teraz za cifru G dosadíme 2.

- Ak by cifra F bola 0, zvyšné cifry by sme si dorátali nasledovne:
  $E - F = G \rightarrow E - 0 = 2 \rightarrow E = 2$
  $D - E = F \rightarrow D - 2 = 0 \rightarrow D = 2$
  $C - D = E \rightarrow C - 2 = 2 \rightarrow C = 4$
  $B - C = D \rightarrow B - 4 = 2 \rightarrow B = 6$
  $A - B = C \rightarrow A - 6 = 4 \rightarrow A = 10$ a keďže takto veľká cifra neexistuje, ani tento kód nie je možný a ani žiadne ďalšie, kde by cifra G bola 2, pretože by nastal rovnaký problém tak ako aj v predchádzajúcich prípadoch.

Keďže sme dostali príliš veľkú a neexistujúcu cifru vo všetkých kódoch, ktoré končili 2, rovnaký problém by nastal aj pri iných kódoch, ktoré by končili na väčšie cifry, keďže by sme opäť len pripočítavali k ešte väčším číslam. Každá nová cifra odzadu totiž vznikala ako súčet dvoch predchádzajúcich cifier odzadu.

Takto sme našli všetky možné kódy a ukázali, že iné už neexistujú.

Úloha 13:

Profesorka McMinarčíková zadáva písomnú prácu dvom triedam. Priemerný výsledok žiakov v dopoludňajšej triede je 84 a priemerný výsledok v popoludňajšej triede je 70. Pomer počtu žiakov v dopoludňajšej triede k počtu žiakov v popoludňajšej triede je $3 : 4$. Aký je priemerný výsledok všetkých žiakov?

Výsledok: 76

Riešenie:

Keďže pomer žiakov v dopoludňajšej a popoludňajšej triede je $3 : 4$, môžeme si na základe neho určiť konkrétne počty žiakov, s ktorými budeme pri riešení úlohy pracovať. Pre jednoduchosť riešenia si môžeme povedať, že v dopoludňajšej triede budú žiaci 3, a v popoludňajšej 4 (týmito počtami žiakov zachovávame pomer $3 : 4$, rovnako by fungovali napríklad počty žiakov 6 a 8).

Priemerný výsledok v dopoludňajšej triede vieme vypočítať ako súčet všetkých výsledkov v triede vydelený počtom žiakov. Na začiatku sme si určili, že žiaci sú v tejto triede traja. To znamená, že súčet výsledkov v tejto triede vieme dostať vynásobením priemerného výsledku a počtu žiakov: $84 \cdot 3 = 252$.

Ďalej sa pozrieme na popoludňajšiu triedu. Povedali sme si, že v nej sú žiaci štyria. Súčet všetkých výsledkov vypočítame rovnako ako v dopoludňajšej triede, teda vynásobením priemerného výsledku a počtu žiakov: $70 \cdot 4 = 280$.

Teraz, keď vieme súčty výsledkov v oboch triedach, sa môžeme pozrieť na priemerný výsledok všetkých žiakov z oboch tried. Ten vypočítame tak, že súčet výsledkov všetkých žiakov vydelíme počtom všetkých žiakov. Vieme, že súčty výsledkov z dopoludňajšej a popoludňajšej triedy sú 252 a 280, spolu $252 + 280 = 532$. Zároveň poznáme aj počty žiakov v jednotlivých triedach, spolu ich je $3 + 4 = 7$. Priemerný výsledok teda bude: $\frac{532}{7} = 76$.

Úloha 14:

Dano vynáša Starému Janovi sáčky so smetím z veže. Do veže vedie eskalátor, ktorý má 100 metrov a ide vždy nahor rýchlosťou 4 km/h. Dano zároveň kráča rýchlosťou 5 km/h po eskalátore. Koľkokrát spraví Dano kolečko hore-dole za 1 hodinu?

Výsledok: 9

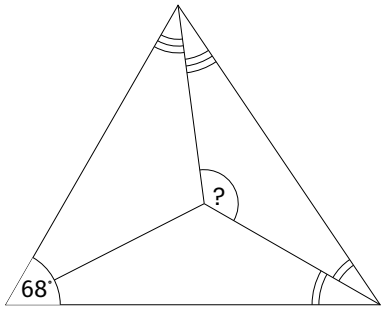
Riešenie:

Vypočítajme si, koľko bude Janovi trvať jedno kolečko. Najprv môžeme zistiť, ako dlho mu bude trvať cesta hore. Vieme, že on sám ide 5 km/h a zároveň pod ním ide eskalátor, ktorý ide 4 km/h. Tu nám stačí len sčítať dané dve rýchlosti, keďže idú do toho istého smeru, teda Dano ide nahor rýchlosťou $4\,\text{km/h} + 5\,\text{km/h} = 9\,\text{km/h}$. Keďže rýchlosť je vzdialenosť vydelená časom, tak potrebný čas spočítame vydelením vzdialenosti rýchlosťou. Z toho nám vyjde čas $0{,}1\,\text{km} : 9\,\text{km/h} = 1/90\,\text{h}$. Keďže v hodine je 3600 sekúnd, cesta nahor bude Danovi trvať $1/90 \cdot 3600 = 40$ sekúnd.

Pri ceste dole už ale musí ísť proti smeru eskalátora, čiže budeme musieť rýchlosti od seba odčítať, čo nám dá $5\,\text{km/h} - 4\,\text{km/h} = 1\,\text{km/h}$. Opäť vydelením vzdialenosti rýchlosťou zistíme, že jedna cesta dole mu bude trvať $0{,}1\,\text{km} : 1\,\text{km/h} = 0{,}1\,\text{h} = 360\,\text{s}$. Teraz sčítame časy, čím dostaneme $360 + 40 = 400\,\text{s}$. Jedno kolečko mu teda bude trvať 400 sekúnd. V jednej hodine je 3600 sekúnd. Keď chceme zistiť, koľko kolečiek spravil, potrebujeme vydeliť celkový čas časom jedného kolečka, čo bude $3600\,\text{s} : 400\,\text{s} = 9$. Takto sme zistili, že za hodinu spraví 9 kolečiek.

Úloha 15:

Cukrovinka z Fiľakova má tvar trojuholníka ako na obrázku. Jeden z jej vnútorných uhlov má veľkosť 68° a dvojice uhlov pri zvyšných dvoch vrcholoch sú rovnaké. Koľko stupňov má uhol označený otáznikom?



Výsledok: 124°

Riešenie:

Uhly, ktoré sú na obrázku označené dvoma čiarkami, označme ako uhly α a uhly označené troma čiarkami ako β. Z obrázku poznáme veľkosť 68° jedného vnútorného uhla veľkého trojuholníka a veľkosti zvyšných dvoch vnútorných uhlov tohto trojuholníka vieme vyjadriť ako $2\alpha + 2\beta$. Vieme, že súčet vnútorných uhlov v každom trojuholníku je 180°. Dva

zvyšné uhly veľkého trojuholníka musia teda mať dokopy veľkosť $2\alpha + 2\beta = 180° - 64° = 112°$.

Menší trojuholník, ktorý obsahuje uhol označený otáznikom, má okrem daného uhla ešte jeden uhol α a jeden uhol β, dokopy $\alpha + \beta$. Vidíme, že $(2\alpha + 2\beta) : 2 = \alpha + \beta$, takže veľkosť $\alpha + \beta = 112° : 2 = 56°$. Veľkosť uhla s otáznikom zistíme už jednoducho tým, že od celkového súčtu vnútorných uhlov daného trojuholníka odčítame veľkosť zvyšných dvoch uhlov, ktorú poznáme, teda $180° - 56° = 124°$.

Úloha 16:

Na drevorubačskej prehliadke rozkázal generál Lota, aby drevorubači pochodovali v radoch po desiatich drevorubačoch. Ukázalo sa však, že v poslednom rade jeden drevorubač chýbal. Generál Lota rozkázal postavenie po deviatich drevorubačoch do každého radu, ale jeden drevorubač v poslednom rade stále chýbal. A tak zmenšoval počet drevorubačov v jednom rade na 8, 7, 6, ... až na 2, ale stále jeden v poslednom rade chýbal. Koľko najmenej drevorubačov mohlo byť na prehliadke?

Výsledok: 2519

Riešenie:

Ak v poslednom rade stále jeden drevorubač chýba, znamená to, že ak by sa jeden pridal, tak by všetky rady boli zaplnené, a teda počet drevorubačov by bol deliteľný počtom ľudí v každom rade. Znamená to teda, že ak počet drevorubačov zväčšíme o 1, tak bude deliteľný všetkými číslami od 2 do 10.

Keďže chceme nájsť najmenší možný počet drevorubačov, hľadáme najmenší spoločný násobok čísel od 2 do 10. Ten sa hľadá tak, že pre každé prvočíslo nájdeme, koľkokrát sa najviac nachádza v rozklade týchto čísel a urobíme ich súčin.

Najmenší spoločný násobok čísel od 2 do 10 je teda $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Toto číslo ešte musíme zmenšiť o 1, keďže hľadáme počet zo zadania, kde stále jeden drevorubač chýbal. Najmenší počet drevorubačov je teda 2519.

Úloha 17:

Ľudo vyznačí niekoľko bodov na kružnici a následne ich pospája tak, aby vytvorili mnohouholník, ktorý má všetky vnútorné uhly menšie ako 180°. Zaujíma ho, aký je súčet všetkých vnútorných uhlov tohto útvaru. Pri sčítavaní však prehliadne jeden uhol a dostane tak výsledok 2026°. Aký veľký bol uhol, ktorý prehliadol?

Výsledok: 134°

Riešenie:

Môžeme si všimnúť, že trojuholník má súčet vnútorných uhlov 180°, štvorec má súčet vnútorných uhlov 360°, čo je 180° +180°, päťuholník má 540°, čo je 360° +180°, šesťuholník má 720°, čo je 540° + 180°, a rovnako sa tento súčet ďalej zvyšuje o 180°. Z toho vyplýva, že súčet vnútorných uhlov mnohouholníkov je násobok 180°.

Ľudo prehliadol jeden uhol a dostal 2026°. My tak potrebujeme nájsť najbližší násobok 180° väčší ako 2026°, keďže ten nasledujúci by už bol väčší od 2026° o viac ako 180°. To je číslo $180° \cdot 12 = 2160°$, takže mnohouholník mal súčet vnútorných uhlov 2160°. Od toho odčítame Ľudov súčet 2026° a zistíme veľkosť uhla, ktorý Ľudo prehliadol, čo je teda $2160° - 2026° = 134°$.

Úloha 18:

Štvorciferné číslo nazývame *špičkové* práve vtedy, ak má všetky cifry nenulové a pri ľubovoľnom preusporiadaní jeho cifier sú všetky tieto preusporiadania deliteľné 12. Koľko existuje štvorciferných *špičkových* čísel?

Výsledok: 6

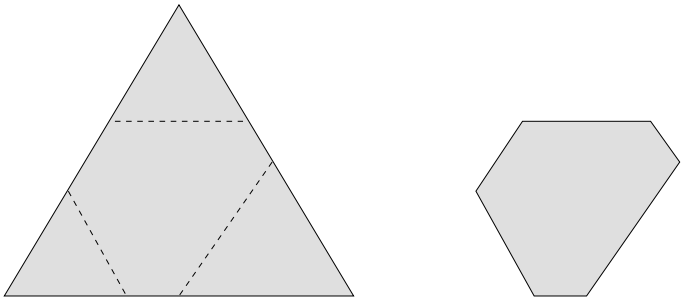
Riešenie:

Ak má byť každé preusporiadanie deliteľné 12, musí byť deliteľné aj 3, aj 4 (teda aj deliteľné 2). Z deliteľnosti 2 musí byť posledná cifra vždy párna, a teda kvôli možnosti preusporiadania cifier musia byť všetky cifry párne (a zo zadania nenulové), teda 2, 4, 6, alebo 8.

Všimnime si, že aby bolo číslo deliteľné 4, ak je zložené z párnych cifier, posledná cifra nemôže byť 2 ani 6, takže špičkové číslo nemôže tieto dve cifry obsahovať. Skladá sa teda iba z cifier 4 a 8. Aby boli tieto čísla deliteľné 3, teda aby bol deliteľný 3 ich ciferný súčet, musia obsahovať dvakrát cifru 4 a dvakrát cifru 8. Stačí už len zistiť, koľko takých čísel je, teda spočítať, koľkými spôsobmi vieme dvojicu cifier (napr. štvorky) umiestniť na dve miesta zo štyroch možných, keďže takto budú zvyšné dve jednoznačne určené. Na umiestnenie prvej z nich máme 4 možnosti a na umiestnenie druhej potom 3 možnosti, čo je $4 \cdot 3 = 12$, avšak týmto spôsobom všetky možnosti zarátame dvakrát, čo musíme napraviť vydelením 2. Existuje tak $12 : 2 = 6$ štvorciferných špičkových čísel.

Úloha 19:

Dano má kus dreva v tvare rovnostranného trojuholníka so stranou 30. Z každého z troch rohov odrezal rovnostranný trojuholník, ako je znázornené na obrázku. Vzniknutý šesťuholník má obvod 56. Aký je súčet obvodov troch odrezaných trojuholníkov?



Výsledok: 102

Riešenie:

Ak má rovnostranný trojuholník stranu 30, jeho obvod je $30 + 30 + 30 = 90$. Vzniknutý šesťuholník má obvod 56. Môžeme si všimnúť, že v obvode trojuholníka sú zarátané dve strany zo všetkých troch malých rovnostranných trojuholníkov. V obvode šesťuholníka je zarátaná jedna strana zo všetkých troch malých rovnostranných trojuholníkov. Tri časti, ktoré nepatria trom malým trojuholníkom, sú zarátané v obvode trojuholníka aj šesťuholníka. To znamená, že keď odčítame obvod šesťuholníka od obvodu trojuholníka, zistíme, akú hodnotu má súčet dĺžok jednej strany z každého trojuholníka, a to $90 - 56 = 34$. Keď už poznáme súčet dĺžok jednej strany z každého trojuholníka a vieme, že všetky tri malé trojuholníky sú rovnostranné, vynásobíme tento súčet dĺžok tromi a získame súčet ich obvodov, ktorý teda je $34 \cdot 3 = 102$.

Úloha 20:

Kim pasie na oplotenej lúke husi, sliepky, ovce a kozy, pričom z každého druhu má aspoň jedno zviera. Okolo ide pocestný a spýtal sa jej, koľko má zvierat. Kim odpovedala: „Husí je dvakrát toľko ako sliepok a kôz je trikrát toľko ako oviec. Spolu majú všetky zvieratá presne 90 nôh.“ Určte počet zvierat každého druhu, ktoré Kim na tejto lúke pasie.

Výsledok: 3 ovce, 7 sliepok, 14 husí, 9 kôz

Riešenie:

Označme si počty zvierat podľa prvých písmen ich názvov O, H, K, S a počty ich nôh potom budú $4O$, $2H$, $4K$, $2S$. Z toho, čo Kim povedala, si vieme zapísať, že počet nôh husí je dvojnásobný ako počet nôh sliepok ($2H = 2 \cdot 2S$) a počet nôh kôz je trojnásobný ako počet nôh oviec ($4K = 3 \cdot 4O$). To si zapíšeme do rovnice:

$$90 = (2 \cdot S + 2 \cdot H) + (4 \cdot O + 4 \cdot K) = (2 \cdot S + 4 \cdot S) + (4 \cdot O + 12 \cdot O) = 6 \cdot S + 16 \cdot O$$

Po vydelení dvoma dostávame $45 = 3 \cdot S + 8 \cdot O$. Keďže S aj O musia byť kladné celé čísla, potrebujeme nájsť také O, aby $3 \cdot S = 45 - 8 \cdot O$ bolo deliteľné tromi. Keďže 45 je deliteľné tromi, tak aj $8 \cdot O$, a teda aj O, musí byť deliteľné tromi, aby ich rozdiel bol deliteľný 3. Jediná možná hodnota O je preto 3, keďže pre najbližšiu vyhovujúcu hodnotu, teda 6, a preto aj každú väčšiu vyhovujúcu hodnotu, by vychádzalo záporné S.

Jediné možné riešenie je teda $O = 3$. Potom z rovnice vyššie po vydelení tromi $S = (45 - 8 \cdot 3) : 3$, a teda $S = 7$. Následne už len dosadením do prvých rovníc dopočítame počet husí a kôz. Keďže $H = 2 \cdot S$, tak $H = 2 \cdot 7 = 14$. Keďže $K = 3 \cdot O$, tak $K = 3 \cdot 3 = 9$.

Kim teda pásla 3 ovce, 7 sliepok, 14 husí a 9 kôz.

Úloha 21:

V 70-dňovom drevorubačskom turnaji hrá nejaký počet hráčov. Každý deň sa odohrá jeden zápas, v ktorom jeden človek prehrá a jeden vyhrá. Človek, ktorý vyhral, bude znova hrať najneskôr o 8 dní, zatiaľ čo človek, ktorý prehral, nebude hrať ďalších najmenej 9 dní. Nájdite najmenší možný počet ľudí, pre ktorý sa takýto turnaj dokáže odohrať.

Výsledok: 11

Riešenie:

Pozrime sa na prvých 9 dní turnaja. Každý deň musí niekto prehrať. Hráč, ktorý prehral, potom nesmie hrať ďalších 9 dní. Preto počas prvých 9 dní musí každý deň prehrať iný hráč.

Po deviatich dňoch teda máme 9 hráčov, ktorí prehrali. Ani jeden z nich nemôže na 10. deň hrať. Ak by bolo v turnaji iba 10 hráčov, zostal by nám na 10. deň iba jeden hráč, ktorý môže hrať. Na zápas však potrebujeme dvoch hráčov.

Preto musí byť hráčov aspoň 11. Pre tento počet sa už turnaj dokáže odohrať. Jedného hráča necháme vyhrať každý zápas. Zvyšných 10 hráčov sa bude pri prehrách pravidelne striedať. V prvý deň prehrá prvý hráč, v druhý deň druhý a tak ďalej po desiateho hráča. Následne tento proces začne od začiatku. Každý z hráčov teda prehrá raz za 10 dní. Keď prehrá, tak nasledujúcich 9 dní nehrá a potom opäť nastúpi. Hráč, čo vyhrá, hrá každý deň, teda vždy, keď vyhrá, hrá znova nasledujúci deň, čiže spĺňa podmienku, že vždy hrá znova najneskôr o 8 dní. Takýmto spôsobom vieme pokračovať po celú dobu 70 dní. Najmenší možný počet hráčov je teda 11.

Úloha 22:

Starý Jano hľadá počet všetkých trojciferných čísel $\overline{ABC}$ s rôznymi nenulovými ciframi, pre ktoré platí, že keď od dvojciferného čísla $\overline{AB}$ odčíta C, výsledok sa rovná súčtu dvojciferného čísla $\overline{BC}$ a čísla A. Zistite tento počet.

Označenie $\overline{AB}$ označuje dvojciferné číslo, ktorého cifra na mieste desiatok má hodnotu A a cifra na mieste jednotiek má hodnotu B.

Výsledok: 6

Riešenie:

Zadanie si vieme prepísať takto:

$$\overline{AB} - C = \overline{BC} + A$$

V čísle $\overline{AB}$ je A desiatok a B jednotiek, teda $\overline{AB}$ je to isté ako $A \cdot 10 + B \cdot 1$. Takto sa nám zjednodušila rovnica nasledovne:

$$A \cdot 10 + B - C = B \cdot 10 + C + A$$

Odčítame z oboch strán $A + B$:

$$A \cdot 10 + B - C - (A + B) = B \cdot 10 + C + A - (A + B)$$
$$A \cdot 9 - C = B \cdot 9 + C$$

Pripočítame na obe strany C:

$$A \cdot 9 - C + C = B \cdot 9 + C + C$$
$$A \cdot 9 = B \cdot 9 + C \cdot 2$$

Odčítame $B \cdot 9$:

$$A \cdot 9 - B \cdot 9 = C \cdot 2 + B \cdot 9 - B \cdot 9$$
$$A \cdot 9 - B \cdot 9 = C \cdot 2$$

Všimnime si, že ľavá strana rovnice je násobkom 9, teda aj pravá strana ním musí byť. Čísla 2 a 9 sú nesúdeliteľné, a tak na to, aby $C \cdot 2$ bol násobok 9, sa musí C rovnať 9, lebo 9 je jediná nenulová cifra, ktorá je násobkom 9. Dosadíme do rovnice a vydelíme 9:

$$A \cdot 9 - B \cdot 9 = 9 \cdot 2$$
$$A = B + 2$$

Všetky možnosti potom budú: 979, 869, 759, 649, 539, 429, 319. V prípade, že by A bolo menšie ako 3, by nemohlo B byť kladné. Ďalej vidíme, že v prípade, kde sa A rovná 9, sa zhoduje cifra A s cifrou C, teda túto možnosť počítať nemôžeme. Ostatné možnosti majú rôzne nenulové cifry a spĺňajú podmienky. Počet trojciferných čísel, ktoré spĺňajú tieto podmienky, je teda 6.

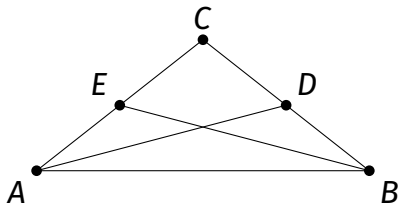
Úloha 23:

Čepeľ sekery je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB a obvodom 50. Nech D je stred strany BC a E stred strany AC. Obvod trojuholníka ABE je o 8 väčší než obvod trojuholníka ACD. Vypočítajte veľkosti strán čepele ABC.

Výsledok: 14; 14; 22

Riešenie:

Obvod trojuholníka ABE je rovný $|AB| + |BE| + |EA|$ a obvod trojuholníka ACD je rovný $|AC| + |CD| + |DA|$.



Zo zadania teda vieme:

$$\left(|AB| + |BE| + |EA|\right) = \left(|AC| + |CD| + |DA|\right) + 8$$

Uvedomme si, že BE a DA sú rovnako dlhé, keďže celý obrázok je symetrický. Z toho vyplýva, že neovplyvňujú rozdiel obvodov, a teda ich vieme odčítať od oboch strán. Potom:

$$\left(|AB| + |EA|\right) = \left(|AC| + |CD|\right) + 8$$

Keďže zo zadania je ABC rovnoramenný, tak úsečky AC a BC sú rovnako dlhé, a keďže D a E sú stredmi BC a AC, tak veľkosti EA a CD sú tiež rovnaké, polovičné od ramien ABC. Môžeme ich tak od oboch strán rovnice odčítať, čím dostaneme:

$$|AB| = |AC| + 8$$

Zo zadania vieme, že pre obvod ABC platí:

$$|AB| + |BC| + |CA| = 50$$

A teda po dosadení $|AB| = |AC| + 8$:

$$(|AC| + 8) + |BC| + |CA| = 50$$

Keďže $|AC|$ a $|BC|$ sú ramená, tak $|AC| = |BC|$, teda:

$$(|AC| + 8) + |AC| + |AC| = 50$$

Potom:

$$3 \cdot |AC| + 8 = 50$$

Po odčítaní 8:

$$3 \cdot |AC| = 42$$

A teda po vydelení 3:

$$|AC| = 14$$

AB ako ďalšie rameno je rovnako 14, a keďže $|AB| = |AC| + 8$, tak $|AC| = 22$.

Strany trojuholníka ABC sú teda 14, 14 a 22.

Úloha 24:

Drevorubač Dano si chce uložiť misky vedľa seba na poličku, prípadne môže menšiu misku vložiť do väčšej. Má 4 misky rôznych veľkostí, koľkými spôsobmi vie tieto 4 misky položiť na poličku?

Výsledok: 75

Riešenie:

Misky môžu byť na poličke samostatne alebo vložené do seba v skupine. Keďže majú rôzne veľkosti, v každej skupine je poradie vloženia jednoznačné – menšia musí byť vo väčšej.

Rozdeľme možnosti podľa počtu skupín na poličke:

- 1 skupina: všetky misky sú v sebe – 1 spôsob.
- 2 skupiny: na poličke sú dve skupiny, pravá a ľavá. Každá zo štyroch misiek môže patriť buď do jednej alebo do druhej skupiny, preto máme $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ možností. Medzi týmito možnosťami sú však aj dve možnosti, kde sú všetky misky v jednej skupine, všetky v ľavej alebo všetky v pravej. V takom prípade by sme mali iba jednu skupinu namiesto dvoch, preto tieto možnosti musíme odčítať a počet možností teda je $16 - 2 = 14$.
- 3 skupiny: zo štyroch misiek musia byť práve dve misky spolu a ďalšie dve samostatne. Máme 6 možností, ako vieme vybrať práve dve misky, keďže ako prvú vieme vybrať zo 4 misiek a ako druhú vieme vyberať z 3. Dokopy tak vieme vybrať $4 \cdot 3 = 12$ spôsobmi, každú možnosť sme ale zarátali dvakrát podľa poradia výberu. Následne chceme usporiadať skupiny na poličke. Na prvé miesto vieme vyberať z troch možností, na druhé z dvoch a na tretie miesto z jednej, teda máme $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ možností ako ich môžeme usporiadať na poličke, dokopy teda máme $6 \cdot 6$ možností, ako usporiadať misky do 3 skupín.
- 4 skupiny: všetky misky stoja samostatne. Na prvé miesto môžeme vyberať zo štyroch misiek, na druhé miesto z troch, na tretie z dvoch a na štvrté máme jednu možnosť. Preto máme $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ možností.

Spolu dostaneme $1 + 14 + 36 + 24 = 75$ spôsobov, ako položiť misky na poličku.

Úloha 25:

Maroš navzájom vynásobil 5 po sebe idúcich párnych kladných celých čísel, ktoré sú aspoň dvojciferné. Aké je najväčšie kladné celé číslo, ktoré určite delí tento súčin?

Výsledok: 3840

Riešenie:

Ak máme 5 po sebe idúcich párnych kladných čísel, ide o 5 z 9 po sebe idúcich čísel. Ak sa pozrieme na prvočíselný rozklad týchto 9 čísel, určite budú obsahovať prvočísla od 2 po 7 a zvyšné prvočísla nemusí žiadne z nich obsahovať, keďže sú väčšie ako 9.

Keďže ide o 9 po sebe idúcich čísel, jedno z párnych čísel bude určite deliteľné číslom 8, keďže každé ôsme číslo je deliteľné 8. Zároveň budú aspoň dve z týchto párnych čísel deliteľné číslom 4, z toho jedno sme už spomenuli pri deliteľnosti číslom 8. Z párnych čísel ostali už len 3, ktoré nemusia byť násobkom čísla 4, ale sú deliteľné 2. Hľadaný deliteľ je teda určite násobkom $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 = 256$, ale nemusí byť násobkom vyššej mocniny 2.

Medzi našimi 9 číslami sa nachádzajú určite práve 3 čísla deliteľné číslom 3, z ktorých aspoň jedno je určite párne. Hľadaný deliteľ je teda určite násobkom 3, ale nemusí byť násobkom 9, keďže zvyšné dva násobky 3 môžu byť nepárne čísla.

Napokon je medzi našimi 9 číslami aspoň jedno číslo deliteľné 5, ale dve nemusia byť. Ak by toto číslo bolo nepárne, bolo by na párnej pozícii v našej deväticí, teda by to bolo druhé, štvrté, šieste alebo ôsme číslo deväticе.

Ak je ale druhé číslo deväticе deliteľné 5, je deliteľné 5 aj siedme číslo, keďže je to iba druhé číslo zväčené o 5. Rovnako to platí pre štvrté a deviate číslo, šieste a prvé číslo a ôsme a tretie číslo. V našej deväticí teda musí byť jedno párne číslo deliteľné 5.

Marošov súčin nemusí byť deliteľný číslom 7. Príkladom je súčin $16 \cdot 18 \cdot 20 \cdot 22 \cdot 24$.

Ukázali sme teda, že Marošovo číslo je určite deliteľné číslom $256 \cdot 3 \cdot 5 = 3840$, a nevieme to povedať o žiadnom väčšom čísle, keďže pre každé také prvočíslo navyše sme našli príklad, keď ním Marošovo číslo nemusí byť deliteľné.

Úloha 26:

Dano sa hrá na šachovnici 8×8. Zaujíma ho, koľko existuje obdĺžnikov (aj štvorce sú obdĺžniky) zložených len z políčok tejto šachovnice.

Výsledok: 1296

Riešenie:

Šachovnica 8×8 sa skladá z 9 vodorovných čiar a 9 zvislých čiar. Každý obdĺžnik tvorený políčkami šachovnice je ohraničený 4 takýmito čiarami, konkrétne 2 vodorovnými a 2 zvislými. Keďže každý obdĺžnik má každú stranu dlhú aspoň 1 políčko, musia to byť 2 rôzne vodorovné čiary a 2 rôzne zvislé čiary. Každý obdĺžnik je teda definovaný dvojicou rôznych vodorovných čiar a dvojicou rôznych zvislých čiar a každá takáto štvorica definuje iný obdĺžnik.

Počet obdĺžnikov bude teda počet možností, ako vieme vybrať 2 z 9 vodorovných čiar, vynásobený počtom možností, ako vieme vybrať 2 z 9 zvislých čiar. Pre jednu dvojicu čiar je to 9 možností na prvú čiaru vynásobených 8 možnosťami na druhú (keďže nemôžu byť obe čiary rovnaké), ale to sme započítali každú dvojicu dvakrát, teda to musíme ešte vydeliť 2. Máme tak $(9 \cdot 8) : 2 = 36$ možností, ako vybrať 2 vodorovné čiary a rovnako máme 36 možností, ako vybrať 2 zvislé čiary. Počet obdĺžnikov bude teda $36 \cdot 36 = 1296$.

Úloha 27:

Peter si vybral päť čísel z 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a povedal svojmu tatkovi ich súčin. Tatko sa snažil zistiť, či je súčet Petrových čísel párny alebo nepárny. Po chvíli usúdil, že sa to zistiť nedá. Aký bol súčin, ktorý Peter povedal tatkovi?

Výsledok: 7560

Riešenie:

To, že tatko nevedel zistiť, či je súčet čísel párny alebo nepárny znamená, že existujú aspoň dve pätice s hľadaným súčinom, z ktorých jedna má párny a druhá nepárny súčet. Namiesto pätíc môžeme rozoberať zvyšné dve nevybrané čísla. Ak majú totiž dve pätice rovnaký súčin, tak aj nevybrané dvojice majú rovnaký súčin. Zároveň, keďže $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 42$, tak súčet nevybranej dvojice je párny práve vtedy, keď je aj súčet vybranej pätice párny, čiže tiež má jedna dvojica párny súčet a druhá nepárny. Hľadáme teda všetky dvojice čísel z 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 také, ktoré majú rovnaký súčin a rozdielnu paritu súčtu.

Tieto dve dvojice využívajú štyri rôzne čísla z 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Ak by totiž niektoré číslo bolo v oboch dvojiciach, tak by aj to druhé číslo muselo byť v oboch dvojiciach rovnaké pre rovnaký súčin. Keďže medzi možnosťami je len jedno číslo deliteľné 5 a jedno číslo deliteľné 7, tak ak jedna dvojica obsahuje číslo 5 alebo 7, má ním deliteľný súčin, ale druhá dvojica nevie mať súčin deliteľný týmto číslom, čiže má nutne iný súčin. Preto hľadáme dve dvojice len z čísel 3, 4, 6, 8, 9.

Aby jedna z nich mala nepárny súčet, musí obsahovať jedno nepárne a jedno párne číslo. Druhá dvojica potom musí obsahovať dve párne čísla, keďže dve nepárne už nevie obsahovať a ona musí mať párny súčet. Rozoberme teda obidve možnosti:

- Jedna dvojica obsahuje číslo 9

  Potom aj druhá dvojica musí mať súčin deliteľný 9, z párnych čísel deliteľných 3 ale zostáva už len 6, nevieme teda dosiahnuť súčin deliteľný 9. Táto možnosť nám preto nevyhovuje.

- Jedna dvojica obsahuje číslo 3

  Žiadna dvojica teda neobsahuje číslo 9. Potom v druhej dvojici musí byť číslo 6, aby bol jej súčin tiež deliteľný 3. Zostávajú tak možnosti 3, 4 a 6, 8, ktoré nemajú rovnaký súčin a 3, 8 a 4, 6, ktoré majú rovnaký súčin a teda vyhovujú.

Jediná možnosť sú teda nevybrané dvojice čísel 3, 8 a 4, 6. Súčin zvyšných čísel je potom $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 = 7560$.

Úloha 28:

Nazvime *Gáborovým číslom* také trojciferné číslo, z ktorého keď vyberieme ktorúkoľvek dvojicu číslic v takom poradí, v akom sú tieto číslice v čísle, vytvoria dvojciferné prvočíslo. Napríklad 137 je *Gáborovo číslo*, pretože 13, 17 a 37 sú prvočísla, ale 211 *Gáborovým číslom* nie je, pretože 21 nie je prvočíslo. Aké je najväčšie *Gáborovo číslo*?

Výsledok: 731

Riešenie:

Ak by bola cifra na mieste stoviek 9, nesplnili by sme podmienky, pretože existuje len jedno dvojciferné prvočíslo začínajúce cifrou 9, a to 97. Jediné trojciferné číslo, ktoré by vzniklo, by bolo 977, kde však 77 nie je prvočíslo.

Ak by bola cifra na mieste stoviek 8, zvyšné cifry by museli byť 3 alebo 9, pretože jediné dvojciferné prvočísla začínajúce 8 sú 83 a 89. Potom by na mieste desiatok a jednotiek boli cifry buď v poradí 99, 93, 39 alebo 33. Avšak každé z nich je deliteľné 3, teda to nie sú prvočísla, preto nevytvoria *Gáborovo číslo*.

Ak by bola na mieste stoviek 7, na mieste desiatok a jednotiek by mohli byť len cifry 1, 3, 9, pretože dvojciferné prvočísla začínajúce 7 sú 71, 73, 79. Už vieme, že 3 a 9 nemôžu byť obe naraz použité v *Gáborovom čísle*. Môžeme teda buď použiť trojicu cifier 7, 1, 9, alebo 7, 1, 3. Z prvej trojice vieme vyskladať čísla 791 a 719. Číslo 791 nie je *Gáborovým číslom*, pretože 91 nie je prvočíslo. Číslo 719 ale vyhovuje. Z druhej trojice vieme vyskladať čísla 713 a 731, ktoré obidve vyhovujú. Z oboch trojíc môžeme vyskladať číslo 711, ktoré taktiež spĺňa podmienky *Gáborovho čísla*. Z vyhovujúcich čísel 711, 713, 719 a 731 je najväčšie 731, preto to bude najväčšie *Gáborovo číslo*.

Úloha 29:

Starý Jano má syna, vnuka a pravnuka. Súčet rokov Jana a pravnuka sa rovná súčtu rokov syna a vnuka. Ak prehodíme číslice vo veku Jana, dostaneme vek syna. Ak prehodíme číslice vo veku vnuka, dostaneme vek pravnuka. Veky všetkých štyroch sú rôzne dvojciferné prvočísla. Akí starí sú?

Výsledok: Starý Jano 97, syn 79, vnuk 31, pravnuk 13

Riešenie:

V každej dvojici dvojciferných čísel sú 2 navzájom prehodené cifry, spolu teda budú vo všetkých vekoch použité 4 cifry. Pozrime sa na to, aké cifry môžu byť použité.

Nemôže byť použitá žiadna párna cifra, keďže jedno z dvojice dvojciferných čísel by bolo párne, a teda by nemohlo byť prvočíslo. Rovnako tam nemôže byť použitá cifra 5, keďže jedno z dvojice čísel by bolo deliteľné 5. Ostávajú nám teda cifry 1, 3, 7, 9.

Z týchto 4 cifier potrebujeme vyskladať 4 prvočísla tak, že dané cifry rozdelíme do dvoch dvojíc. Najskôr sa pozrieme na cifru 9. Čísla 91 ani 93 nie sú prvočísla, ostáva teda len možnosť, že cifra 9 bude v dvojici s cifrou 7 a cifra 1 bude v dvojici s cifrou 3. Overme si, či toto rozloženie naozaj funguje. Čísla 97, 79, 31 aj 13 sú skutočne prvočísla a platí aj, že

súčet najväčšieho čísla s najmenším sa rovná súčtu zvyšných dvoch, a to 110.

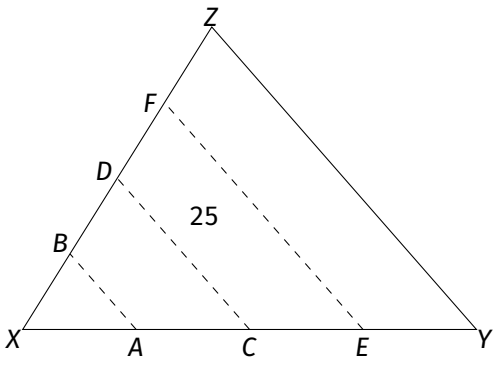
Veky Jana, syna, vnuka a pravnuka sú teda 97, 79, 31 a 13.

Úloha 30:

List tvaru trojuholníka XYZ je rozdelený na štyri oblasti žilkami v tvare priamok rovnobežnými so stranou YZ. Tieto priamky rozdeľujú stranu XY na štyri rovnako dlhé úsečky. Ak má druhá najväčšia oblasť obsah 25, aký je obsah trojuholníka XYZ?

Výsledok: 80

Riešenie:



Pozrime sa najprv na trojuholník XCD. Všimnime si, že je podobný s trojuholníkom XYZ, pretože CD je rovnobežná s YZ, a teda trojuholníky majú všetky uhly rovnaké.

Koeficient podobnosti (t. j. pomer, v akom sú si odpovedajúce strany trojuholníkov podobné), v tomto prípade bude $\frac{1}{2}$, pretože bod C sa nachádza v polovici strany XY. Keďže základňa aj výška trojuholníka XCD sú polovičné oproti trojuholníku XYZ, jeho obsah bude

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

obsahu trojuholníka XYZ.

Označme obsah trojuholníka XYZ ako S. Trojuholník XCD má potom obsah $\frac{1}{4}S$.

Teraz sa pozrime na trojuholník XEF. Tento je opäť podobný trojuholníku XYZ. Koeficient podobnosti je $\frac{3}{4}$, pretože XE tvorí tri štvrtiny strany XY. Jeho obsah je teda

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{16}S.$$

Z toho vyplýva, že druhá najväčšia oblasť $CEFD$, má obsah

$$\frac{9}{16}S - \frac{1}{4}S = \frac{9}{16}S - \frac{4}{16}S = \frac{5}{16}S.$$

Podľa zadania má táto oblasť obsah 25, takže

$$\frac{5}{16}S = 25.$$

Odtiaľ

$$S = 25 \cdot \frac{16}{5} = 80.$$

Teda obsah trojuholníka XYZ je 80.

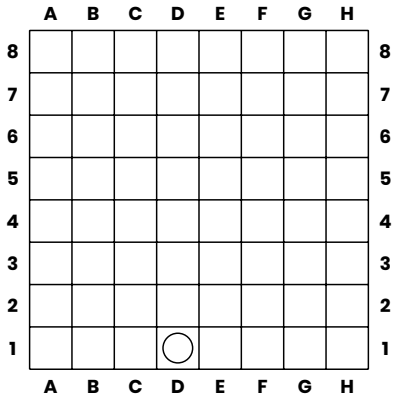
Úloha 31:

Drevorubač Dano položil figúrku strelca na štvrté políčko v spodnom riadku na šachovnici 8 × 8. Tento strelec sa hýbe tak, že v jednom ťahu môže ísť len o práve jedno políčko po diagonále. Koľko je spôsobov, ako vie Dano týmto strelcom prekráčať až na najvrchnejší rad, ak sa nikdy nechce vracať dozadu, teda ide len doprava hore a doľava hore?

Výsledok: 103

Riešenie:

Označme si tak ako na bežnej šachovnici stĺpce od A po H a riadky od 1 po 8. Strelec stojí na $D1$.



Strelec má 1 možnosť ako sa dostať na $C2$ aj na $E2$ a to iba z políčka $D1$, lebo nevie ísť dole. Inam do druhého riadku sa nedostane. Napíšme si do týchto políčok tieto čísla. Na $B3$ sa vie dostať jedným spôsobom z $C2$. Na $D3$ dvoma, a to preto, že jeden je z $C2$ a druhý z $E2$. Na $F3$ sa vie dostať iba jedným spôsobom z $E2$. Inam v treťom riadku sa dostať nevie. Vpíšme si do políčok tieto čísla. Takto postupne spočítajme možnosti pre každé políčko, do ktorého sa strelec vie dostať, až dostaneme obrázok nižšie.

	A	B	C	D	E	F	G	H	
8	14		34		35		20		8
7		14		20		15		5	7
6	4		10		10		5		6
5		4		6		4		1	5
4	1		3		3		1		4
3		1		2		1			3
2			1		1				2
1				◯					1
	A	B	C	D	E	F	G	H	

Teraz vidíme, že na políčka v ôsmom riadku sa vieme dostať $14 + 34 + 35 + 20 = 103$ spôsobmi.

Úloha 32:

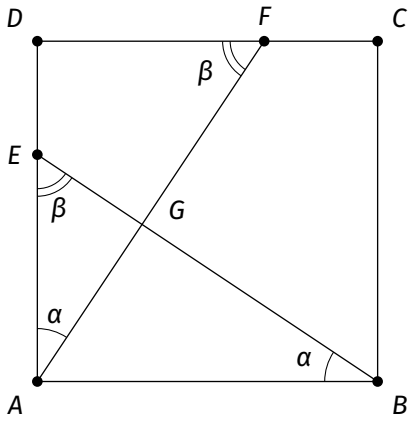
Gábor si chce oplotiť pozemok tvaru štvorca označeného $ABCD$. Na stranách AD a CD sú postupne stĺpy E a F tak, že $|AE| = 2|ED|$ a $|DF| = 2|FC|$. Dvojice bodov A, F a E, B sú spojené lanami. Priesečník lán označíme G. Aký je pomer dĺžok $|EG| : |AG|$?

Výsledok: $2 : 3$

Riešenie:

Vieme, že $|AE| = 2|ED|$ a $|DF| = 2|FC|$, čo znamená, že dĺžky úsečiek AE aj DF sú dve tretiny dĺžky strany štvorca $ABCD$, teda $|AE| = |DF|$. Preto sú trojuholníky ABE a DAF zhodné podľa vety *sus*, keďže aj $|AB| = |DA|$ (lebo sú to strany štvorca) a dvojice strán AB, AE a DF, DA zvierajú navzájom uhly $90°$ (sú to vnútorné uhly štvorca). Vďaka tomu vieme, že $|\sphericalangle ABE| = |\sphericalangle DAF| = \alpha$, $|\sphericalangle BEA| = |\sphericalangle AFD| = \beta$.

Teraz vidíme, že v trojuholníku GAE sa $|\sphericalangle GAE| = \alpha$ a $|\sphericalangle AEG| = \beta$. Trojuholník GAE je teda podľa vety *uu* podobný s trojuholníkmi ABE a DAF. Pomer dĺžok $|AE| : |AB|$ je $2 : 3$, lebo $|AE|$ sú dve tretiny strany štvorca. Kvôli podobnosti je potom aj pomer $|EG| : |AG|$ rovný $2 : 3$.



Úloha 33:

Do mriežky tvorenej 91 stĺpcami a 141 riadkami vpisujú drevorubač Dano a Peter čísla od 1 do $141 \cdot 91 = 12831$, každý do každého štvorčeka po jednom. Dano píše čísla horizontálne (do riadkov) od 1 postupne zľava doprava, teda do prvého riadku napíše 1 - 91, do druhého 92 - 182 ... Peter píše čísla vertikálne (do stĺpcov) od 1 postupne zhora dole od najľavejšieho stĺpca, teda do prvého stĺpca napíše čísla 1 - 141, do druhého 142 - 282 ... Do koľkých štvorčekov napíšu Peter aj Dano rovnaké číslo?

Výsledok: 11

Riešenie:

Priraďme každému políčku mriežky číslo r určujúce, v ktorom riadku sa nachádza a číslo s určujúce, v ktorom stĺpci sa nachádza. Napríklad pre políčko v treťom riadku a štvrtom stĺpci platí $r = 3$ a $s = 4$.

Pozrime sa na to, ako Dano píše svoje čísla. Keď sa pozrieme na dve políčka vedľa seba, to napravo bude o 1 väčšie, keďže Dano píše čísla po riadkoch. S každým zvýšením hodnoty s sa teda zvýši Danovo číslo o 1.

Keď sa pozrieme na dve políčka nad sebou, to spodné bude väčšie o 91, keďže medzi nimi Dano zaplnil číslami celý 91-miestny riadok. S každým zvýšením hodnoty r sa teda Danovo číslo zvýši o 91.

Teraz vieme pre každé políčko vypočítať, aké číslo doň napíše Dano ako súčet čísla stĺpca daného políčka a 91-násobku počtu prechodov na nový riadok, ktorých je o 1 menej, než je číslo riadka, v ktorom sa toto políčko nachádza. Túto myšlienku vyjadríme vzorcom pre výpočet Danovho čísla $s + 91(r - 1)$.

Rovnakou myšlienkou prídeme k tomu, že pre ľubovoľné políčko môžeme vypočítať, aké číslo doň napísal Peter ako $r + 141(s - 1)$.

Pre políčka, do ktorých Dano aj Peter napísali rovnaké číslo teda platí $s + 91(r - 1) = r + 141(s - 1)$. Chceme nájsť všetky celočíselné riešenia tejto rovnice.

Upravujme rovnicu:

$$\begin{aligned}
s + 91(r - 1) &= r + 141(s - 1)\\
s + 91r - 91 &= r + 141s - 141\\
s + 91r + 50 &= r + 141s\\
90r + 50 &= 140s\\
9r + 5 &= 14s\\
9r &= 14s - 5\\
r &= \frac{14s - 5}{9}\\
r &= \frac{9s + 5s - 5}{9}\\
r &= \frac{9s}{9} + \frac{5s - 5}{9}\\
r &= s + \frac{5(s - 1)}{9}
\end{aligned}$$

Aby r bolo celým číslom, musí byť celým číslom aj pravá strana tejto rovnice. Vieme že s je celým číslom, teda celým číslom musí byť aj $\frac{5(s-1)}{9}$. Keďže 5 nie je deliteľné deviatimi, bude $\frac{5(s-1)}{9}$ celé práve vtedy, keď $s - 1$ bude deliteľné deviatimi. To platí práve pre $s = 1$ a následne každé deviate číslo, teda $1, 10, 19 \ldots 82, 91$. Väčšie čísla než 91 už sú väčšie než počet stĺpcov v mriežke, teda ich neberieme do úvahy. Pre všetky tieto čísla nám zároveň vyjde číslo r najviac 141, teda reprezentujú existujúci štvorček v mriežke. Jednoducho spočítame, že týchto čísel je dokopy 11.

Úloha 34:

Kim má niekoľko nerozlíšiteľných čiernych a dvakrát toľko nerozlíšiteľných hnedých topánok. Chce ich zoradiť v skrini tak, aby medzi každými dvoma čiernymi topánkami boli aspoň dve hnedé topánky. Vie, že možných zoradení má viac ako 5000. Koľko najmenej čiernych topánok môže mať?

Výsledok: 99

Riešenie:

Označme si počet čiernych topánok ako n. Potom hnedých topánok je zo zadania $2n$. Predstavme si, že Kim do skrine najprv umiestnila všetky čierne topánky.

Na to, aby platila podmienka zo zadania, musí teraz do každej z $n - 1$ medzier medzi čiernymi topánkami vložiť dve hnedé. Takto umiestni $2 \cdot (n - 1) = 2n - 2$ hnedých topánok

a už jej ostáva voľne umiestniť iba posledné dve hnedé topánky, pričom ukladať môže ako do ľubovoľnej z $n - 1$ medzier medzi čiernymi topánkami, tak aj na začiatok a na koniec. Má teda dokopy $(n - 1) + 2 = n + 1$ miest, medzi ktoré ukladá dve topánky.

Pozrime sa na to, ako by sme vypočítali, koľko má na to Kim možností.

Ak umiestni dve topánky na rôzne miesta, má $n+1$ možností kam umiestniť prvú topánku a n možností kam umiestniť druhú. Všimnime si ale, že uložiť prvú topánku napríklad na piate miesto a druhú na siedme tvorí to isté poradie topánok, ako umiestniť prvú topánku na siedme miesto a druhú na piate. Výsledný počet možností teda ešte musíme predeliť dvoma, čím získame $\frac{n(n+1)}{2}$.

Ak Kim umiestni obe topánky na to isté miesto, má na to jednoducho $n + 1$ možností, ktoré je tiež potrebné pripočítať k tým, ktoré sme už našli.

Dokopy má Kim teda $\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$ možností na to, ako uložiť posledné dve hnedé topánky. Vieme, že tento počet možností je väčší ako 5000. Našou úlohou je teda nájsť najmenšie celé číslo n spĺňajúce nerovnosť $\frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) > 5000$.

Upravujme túto nerovnicu:

$$\begin{aligned} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) &> 5000 \\ n(n+1) + 2(n+1) &> 10000 \\ (n+1)(n+2) &> 10000 \end{aligned}$$

Hľadáme teda dve po sebe idúce čísla, ktorých súčin je väčší ako 10000. Na uľahčenie hľadania si môžeme uvedomiť, že $10000 = 100 \cdot 100$, teda určite platí $10000 > 99 \cdot 100$ aj $10000 < 100 \cdot 101$. Najmenšia vyhovujúca dvojica čísel $(n+1), (n+2)$ je teda 100, 101, z čoho vyplýva, že hľadané n je 99.

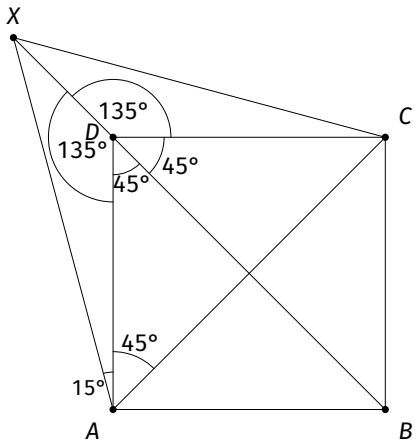
Úloha 35:

Vozík s jedlom je tvaru štvorca $ABCD$ a bod X je na polpriamke BD tak, že $|AX| = |BD|$. Aká je veľkosť uhla DAX?

Výsledok: 15°

Riešenie:

Vieme, že $|AC| = |BD|$ ako uhlopriečky štvorca, $|AD| = |DC|$ ako strany štvorca a tiež, že $|\sphericalangle ADB| = 45° = |\sphericalangle BDC|$, lebo uhlopriečka delí pravý uhol v štvorci na polovicu. Vďaka susedným uhlom $|\sphericalangle ADX| = 180° - |\sphericalangle ADB| = 135°$ a podobne $|\sphericalangle CDX| = 135°$. Trojuholníky ADX a CDX sú teda zhodné podľa *sus*, lebo $|AD| = |CD|$, $|XD| = |XD|$, $|\sphericalangle ADX| = |\sphericalangle CDX|$. Z toho $|CX| = |AX|$ a zo zadania a začiatku riešenia teda $|AX| = |BD| = |AC|$, a teda trojuholník ACX je rovnostranný. Potom $|\sphericalangle CAX| = 60°$ a $|\sphericalangle DAX| = |\sphericalangle CAX| - |\sphericalangle DAC| = 15°$.



Úloha 36:

Gombitovci sa rozhodli navštíviť drevorubačov v Rouge Forte. Gombitovci sa navzájom zdravia slovom „ahoj“ a zároveň zdravia drevorubačov slovom „ahoj“. Drevorubači sa odzdravia Gombitovcom potľapkaním po pleci a vzájomne medzi sebou sa zdravia tak, že sa dotknú špičkami nosov. Pri spoločnej večeri Gombitovcov a drevorubačov sa každý každému pozdravil správnym spôsobom, pričom bolo počuť pozdrav „ahoj“ 415-krát. Koľko dotykov špičiek nosov sa udialo na večeri, ak Gombitovci boli aspoň dvaja?

Výsledok: 3081

Riešenie:

Označme počet Gombitovcov g a počet drevorubačov d. Pozrime sa na to, ako sme mohli počuť pozdrav „ahoj“.

Gombitovci sa zdravia drevorubačom „ahoj“. Preto sa každý Gombita pozdravil každému drevorubačovi „ahoj“ a bolo takto počuť dokopy gd pozdravov „ahoj“.

Gombitovci sa zdravia aj navzájom „ahoj“. Každý Gombita sa pozdravil každému inému Gombitovi „ahoj“, preto bolo takto počuť dokopy ešte $g(g-1)$ pozdravov „ahoj“.

Teda dokopy sme počuli $gd + g(g-1) = g(d+g-1)$ krát „ahoj“. Zo zadania je tento počet rovný 415, teda $g(d+g-1) = 415$. Upravme to ekvivalentne na $d + g - 1 = \frac{415}{g}$

Keďže $d + g - 1$ je celé číslo, tak 415 musí byť deliteľné g. Prvočíselný rozklad 415 je $5 \cdot 83$. Preto g môže byť iba 1, 5, 83, alebo 415. Podľa zadania sú však Gombitovci aspoň 2, teda g nemôže byť 1.

- Ak by $g = 5$, tak $d + g - 1 = d + 4 = \frac{415}{5} = 83$. Potom $d = 79$.
- Ak by $g = 83$, tak $d + g - 1 = d + 82 = \frac{415}{83} = 5$. Potom $d = -77$, čo zjavne nevyhovuje, lebo počet drevorubačov nie je záporný.
- Ak by $g = 415$, tak $d + g - 1 = d + 414 = \frac{415}{415} = 1$. Teda potom $d = -413$, čo zjavne nevyhovuje z rovnakého dôvodu ako $d = -77$.

Z rozoberania možností vyššie platí nutne $d = 79$ a $g = 5$. Poďme teraz spočítať všetky dotyky špičiek nosov. Každá dvojica drevorubačov sa takto pozdraví. Počet rôznych dvojíc drevorubačov je $\frac{79 \cdot 78}{2} = 3081$, čo je aj počet dotykov špičiek nosov.

Na večeri sa udialo 30801 dotykov špičiek nosov.

Úloha 37:

Drevorubač Dano súčasne hodí šiestimi štandardnými šesťstennými kockami a vypočíta súčin šiestich získaných čísel. Aká je pravdepodobnosť, že tento súčin je deliteľný číslom 4?

Výsledok: $\frac{59}{64}$

Riešenie:

Počet všetkých možných hodov kockami je 6^6, lebo máme 6 čísel na kocke a 6 kociek. Počet hodov, ktorých súčin je deliteľný 4, spočítame ako rozdiel 6^6 a počtu hodov, ktorých súčin 4 deliteľný nie je. To nastane práve vtedy, keď máme buď 0 párnych čísel alebo 1, ktoré nie je deliteľné 4 (ak by sme mali dve, už by náš súčin mal v prvočíselnom rozklade aspoň dve dvojky a bol by 4 deliteľný).

0 párnych čísel máme vtedy, keď máme 6 nepárnych čísel, čo nastane v 3^6 možnostiach, lebo volíme 3 nepárne čísla na 6 kockách.

1 párne číslo iné ako 4 máme na nejakej kocke v 2 možnostiach, a to hodom 2 alebo 6. Túto kocku vieme vybrať zo 6 kociek a na zvyšných 5 má padnúť jedno z 3 nepárnych čísel. Dokopy máme teda $2 \cdot 6 \cdot 3^5 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3^5 = 4 \cdot 3^6$ možností.

Dokopy je teda počet hodov, ktorých súčin nie je deliteľný 4 rovný $3^6 + 4 \cdot 3^6 = 5 \cdot 3^6$. Počet možností, v ktorých je súčin deliteľný 4 je teda

$$6^6 - 5 \cdot 3^6 = (2 \cdot 3)^6 - 5 \cdot 3^6 = 2^6 \cdot 3^6 - 5 \cdot 3^6 = 3^6(2^6 - 5)$$

Potom pravdepodobnosť, že súčin hodu je deliteľný 4, je rovná

$$\frac{3^6(2^6 - 5)}{6^6} = \frac{3^6(2^6 - 5)}{(2 \cdot 3)^6} = \frac{3^6(2^6 - 5)}{2^6 \cdot 3^6} = \frac{2^6 - 5}{2^6} = \frac{59}{64}$$

Úloha 38:

Petrovi doletela kačka s poštou zakódovanou nenulovými reálnymi číslami x, y, z, pre ktoré platí:

$$\frac{(x + y)}{z} = \frac{(y + z)}{x} = \frac{(z + x)}{y}$$

Nájdite všetky možné hodnoty nasledovného výrazu:

$$\frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{xyz}$$

Výsledok: -1; 8

Riešenie:

Rozdeľme si rovnosť zo zadania na tri rovnice, ktoré z nej vyplývajú:

$$\frac{(x + y)}{z} = \frac{(y + z)}{x}; \frac{(x + y)}{z} = \frac{(z + x)}{y}; \frac{(y + z)}{x} = \frac{(z + x)}{y}$$

Pozrime sa na prvú z nich a upravme ju:

$$\begin{aligned} \frac{(x + y)}{z} &= \frac{(y + z)}{x} \\ x(x + y) &= z(y + z) \\ x^2 + xy &= zy + z^2 \\ x^2 - z^2 + xy - zy &= 0 \\ (x + z)(x - z) + y(x - z) &= 0 \\ (x + y + z)(x - z) &= 0 \end{aligned}$$

Obdobnými úpravami aj zvyšných dvoch dostaneme:

$$(x + y + z)(x - y) = 0$$
$$(x + y + z)(y - z) = 0$$

Na to, aby platili všetky tri, musí buď $x + y + z = 0$, alebo $x - y = x - z = y - z = 0$.

Ak $x + y + z = 0$, tak $x + y = -z, y + z = -x, z + x = -y$. Dosaďme to do hľadaného výrazu:

$$\frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{xyz} = \frac{(-z)(-x)(-y)}{xyz} = \frac{-xyz}{xyz} = -1$$

Prvá možná hodnota je -1.

Ak $x - y = x - z = y - z = 0$, tak $x = y = z$. Dosaďme x za y a z :

$$\frac{(x + y)(y + z)(z + x)}{xyz} = \frac{2x \cdot 2x \cdot 2x}{x \cdot x \cdot x} = \frac{8x^3}{x^3} = 8$$

Druhá možná hodnota je 8.

Všetky možné hodnoty zadaného výrazu sú -1 a 8.

Úloha 39:

Drevorubači komunikujú špeciálnou abecedou obsahujúcou len písmená *D*, *R*, *E*, *V*, *O*. V ich jazyku je platné každé slovo, ktoré neobsahuje tri po sebe idúce spoluhlásky ani dve po sebe idúce samohlásky. Koľko platných slov skladajúcich sa z práve 7 písmen majú drevorubači vo svojom jazyku?

Výsledok: 8532

Riešenie:

V abecede máme tri spoluhlásky *D*, *R*, *V* a dve samohlásky *E*, *O*. Najprv sa pozrieme na to, či na danom mieste v slove je spoluhláska alebo samohláska. Spoluhlásky si označíme ako *B* a samohlásky si označíme ako *A*. V platnom slove sa nemôžu objaviť dve samohlásky za sebou, takže sa nesmie v slove objaviť *AA*. Zároveň nesmú byť za sebou tri spoluhlásky, čiže sa v slove nemôže objaviť *BBB*. Pre slovo s dĺžkou 7 písmen je minimálny počet samohlások 2, pretože ak by bola iba jedna, boli by tri spoluhlásky vedľa seba.

Z toho vyplýva, že pre slová obsahujúce práve dve samohlásky a päť spoluhlások máme tieto možnosti usporiadania: *BABBABB*, *BBABABB*, *BBABBAB*. Na každé miesto pre spoluhlásku máme 3 možnosti, aké konkrétne písmeno sa tam môže nachádzať, a na každé miesto pre samohlásku máme dve možnosti. Preto dostaneme $3 \cdot 3^5 \cdot 2^2 = 2916$ slov.

Ďalej môžeme mať tri samohlásky a štyri spoluhlásky, takýchto možností je 8: *ABABABB*, *ABABBAB*, *ABBABAB*, *ABBABBA*, *BABABAB*, *BABABBA*, *BABBABA*, *BBABABA*. Preto dostaneme $8 \cdot 3^4 \cdot 2^3 = 5184$ možností na správne slová v daných tvaroch.

Ak máme štyri samohlásky, tak existuje iba jediná možnosť, a to: *ABABABA*. Máme tri spoluhlásky a štyri samohlásky, takže dostaneme $3^3 \cdot 2^4 = 432$ slov.

Viac ako štyri samohlásky mať nemôžeme, lebo by sme mali dve z nich vedľa seba. Spolu teda dostaneme $2916 + 5184 + 432 = 8532$ platných slov s dĺžkou 7.

Iné riešenie:

Pozrime sa najprv na platné slová z troch písmen. Opäť označme samohlásky ako *A* a spoluhlásky ako *B*.

- Tých platných slov, ktoré končia na samohlásku, teda majú tvar *ABA* alebo *BBA*, je $2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 2 = 12 + 18 = 30$.
- Tých, ktoré končia na jednu spoluhlásku, teda majú tvar *BAB*, je $3 \cdot 2 \cdot 3 = 18$.
- Tých, ktoré končia na dve spoluhlásky, teda majú tvar *ABB*, je $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

Uvedomme si, že teraz vieme postupne spočítať počet platných slov pre väčšie počty písmen. Tie, ktoré končia na samohlásku, totiž pred pridaním posledného písmena museli končiť na jednu alebo dve spoluhlásky, a tak len tieto počty sčítajme a vynásobme dvoma, keďže máme na výber z dvoch samohlások na pridanie. Tie, ktoré končia na jednu spoluhlásku, museli predtým končiť na samohlásku, teda tento počet len vynásobme tromi, a tie, ktoré končia na dve spoluhlásky, predtým končili na jednu spoluhlásku, teda tento počet tiež len vynásobme tromi. Doplňme teda tabuľku:

počet písmen	samohláska	jedna spoluhláska	dve spoluhlásky
3	30	18	18
4	72	90	54
5	288	216	270
6	972	864	648
7	3024	2916	2592

Vidíme, že spolu existuje $3024 + 2916 + 2592 = 8532$ platných slov dĺžky 7.

Úloha 40:

V Strede nad Bodrogom majú vodáreň, kde stratili dokument so záznamom o počte vodomerov v meste. Pre ich počet platí, že sa rovná 7^{7^7}. Aká je posledná číslica ich celkového počtu?

Výsledok: 3

Riešenie:

Pozrime sa na to, ako sa mení posledná číslica čísla, ktoré znovu a znovu násobíme siedmimi.

Ešte predtým nám ale pomôže uvedomiť si, že vo všeobecnosti, keď násobíme dve čísla, poslednú číslicu súčinu ovplyvňujú iba posledné číslice pôvodných činiteľov. Konkrétnejšie platí, že posledná číslica súčinu celých čísel je taká istá, ako posledná číslica súčinu iba ich posledných číslic.

Na začiatku máme iba sedmičku, posledná číslica je teda 7. V ďalšom kroku dostaneme $7 \cdot 7 = 49$, teda poslednú číslicu 9. Teraz použijeme vyššie uvedené pozorovanie. Keďže poslednú číslicu súčinu ovplyvňujú iba posledné číslice činiteľov, tak ak nám záleží iba na zisťovaní poslednej číslice, do ďalšieho kroku nám stačí pracovať už iba s číslom 9.

V treťom kroku tak dostaneme $9 \cdot 7 = 73$, teda poslednú číslicu 3 (a skutočne sedí, že $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$, čo má poslednú číslicu 3) a v štvrtom kroku dostaneme $3 \cdot 7 = 21$, čiže poslednú číslicu 1.

V piatom kroku by sme dostali $1 \cdot 7 = 7$, takže znovu poslednú číslicu 7. Pri tejto číslici sme už ale raz boli, a to úplne na začiatku. Výsledky ďalších krokov sa nám tak začnú opakovať. Posledné číslice jednotlivých medzikrokov budú v poradí $7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, \ldots$.

Vidíme, že máme iba štyri možnosti na poslednú číslicu celého čísla 7^{7^7}. Jednotlivé možnosti sa striedajú vždy po štyroch krokoch. Krokov je dokopy toľko, koľkokrát číslo znovu

vynásobíme sedmičkou, a to je 7^7. Potrebujeme zistiť, na ktorej zo štyroch opakujúcich sa možností skončíme. Inými slovami, aký zvyšok po delení štyrmi má číslo 7^7.

Na to použijeme úplne rovnaké úvahy ako doteraz. Doteraz sme sa pozerali na posledné číslice, čo sú vlastne zvyšky po delení desiatimi. Jediné, čo sa teraz zmení je, že budeme sledovať zvyšky po delení štyrmi. Stále platí, že zvyšok súčinu dvoch čísel po delení štyrmi je taký istý, aký je zvyšok súčinu iba zvyškov jednotlivých čísel.

V prvom kroku máme iba 7, čo má zvyšok 3 po delení štyrmi. V druhom kroku potom máme $3 \cdot 7 = 21$, čo má zvyšok 1 po delení štyrmi. Ďalej $1 \cdot 7 = 7$, čo je znovu zvyšok 3. Vidíme, že v tomto prípade sa nám zvyšky začali opakovať už po dvoch krokoch. Nepárne kroky majú zvyšok 3, párne 1. A my máme krokov 7, preto 7^7 má zvyšok 3 po delení štyrmi.

To nám hovorí, že na konci, po všetkých vynásobeniach sedmičkou a všetkých zopakovaniach celej štvorice možností poslednej číslice, zastaneme na tretej zo štyroch opakujúcich sa možností, čo je číslica 3.

Hádanky

Hádanka 1:

Má to kožu, ale nie je to zviera. Má to listy, ale nie je to strom. Hovorí to k tebe, ale nemá to ústa. Čo to je?

Výsledok: kniha

Hádanka 2:

Meraný tieňmi, meraný pieskami - meranie je jednoduché pre niekoho s tromi rukami. Koho?

Výsledok: hodiny

Hádanka 3:

Staviam hrady, búram hory, oslepujem ľudí a pomáham im vidieť. Pretekám cez prsty a menším tvar podľa toho, kde ma uväznia. Čo som?

Výsledok: piesok

Hádanka 4:

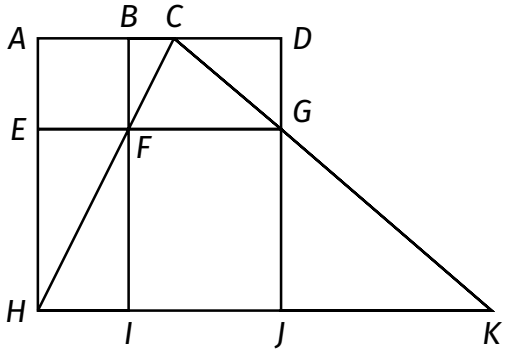
V lese rastie, na brehu sa rodí, vo vode žije, v ohni umiera. Čo to je?

Výsledok: loď

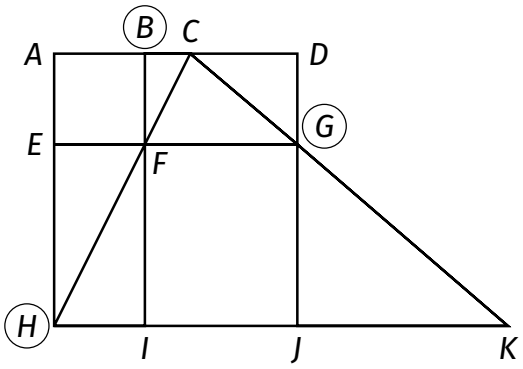
Hlavolamy

Hlavolam 1:

Obrázok znázorňuje plán cestnej siete mesta. Toto mesto má 8 rovných ulíc (každá skupina bodov spojená rovnou čiarou) a 11 križovatiek pomenovaných písmenami $A, B, \ldots, K$. Policajti musia byť umiestnený na troch križovatkách tak, aby na každej z 8 ulíc bol umiestnený aspoň jeden policajt. Na ktorých troch križovatkách by mali byť policajti umiestnení?



Výsledok:



Hlavolam 2:

Rozdeľte tabuľku na biele ostrovy a jeden súvislý čierny oceán tak, aby každé číslo určovalo presný počet bielych políčok svojho ostrova, pričom na každom ostrove smie byť len jedno číslo, ostrovy sa nesmú dotýkať stranami (môžu sa dotýkať len šikmo, rohom), všetky čierne políčka musia byť prepojené do jedného neprerušeného celku a nikde na mape nesmie vzniknúť čierny štvorec 2 × 2.

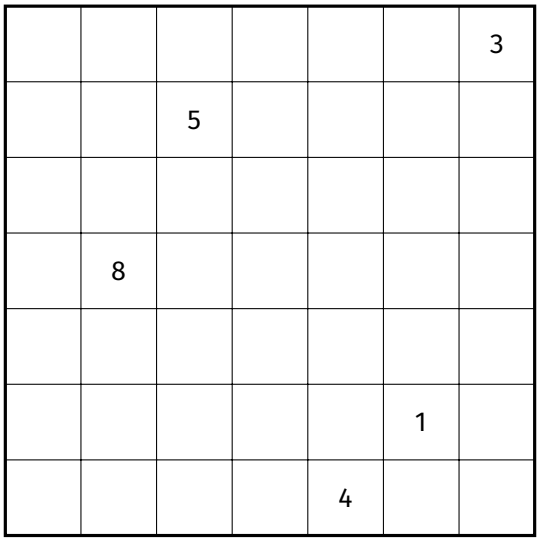
		1		1
	3			
		2		3

Výsledok:

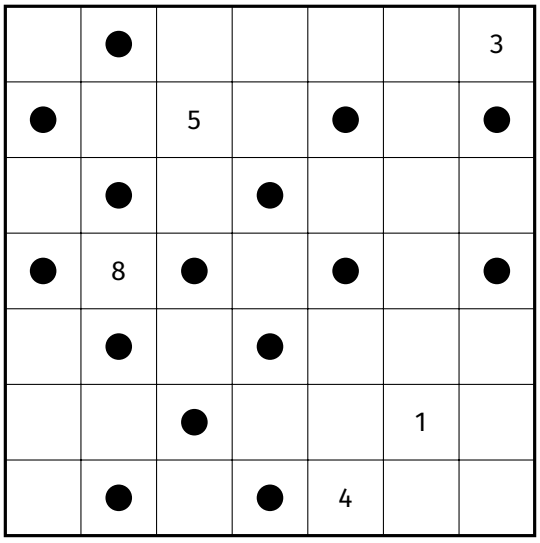
■	■	1	■	1
■		■	■	■
■	3		■	
■	■	■	■	
■		2	■	3

Hlavolam 3:

V tabuľke 7 × 7 sú schované huby. Čísla vpísané do tabuľky hovoria, koľko húb je v danom riadku a stĺpci dokopy. Dve huby nemôžu byť schované na políčkach dotýkajúcich sa stranou a pod číslom nesmie byť schovaná huba. Koľko najviac húb môže byť schovaných v tabuľke?



Výsledok: 15, ako na obrázku:

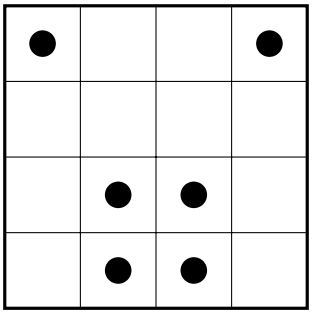


Hlavolam 4:

Umiestnite do tabuľky 4 × 4 šesť kamienkov tak, aby každý kamienok susedil s párnym počtom kamienkov a každé prázdne políčko s nepárnym počtom kamienkov.

Výsledok:

Ľubovoľné otočenie nasledovného rozmiestnenia:



Lomihlav

Lomihlav je matematická súťaž organizovaná Združením STROM a Prírodovedeckou fakultou Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach pre žiakov základných škôl a príslušných tried osemročných gymnázií. V zime roku 2026 sa koná už 25. ročník tejto súťaže.

Trvanie súťaže je magických 99 minút. Na začiatku každý tím dostane 6 matematických úloh a 1 bonus (vo forme hlavolamu alebo hádanky). Po úspešnom vyrátaní úlohy vymení tím úlohu za novú. Po každej pätici správne vyriešených úloh tím dostane jeden bonus (vo forme hlavolamu alebo hádanky). Bonus sa odovzdáva rovnako ako úloha, ale už zaň tím nedostáva novú úlohu, iba sa mu zarátavajú body.

Tímy získavajú body podľa ročníkov súťažiacich v tíme, a to podľa nasledovnej tabuľky:

Ročník				Správny výsledok	
1. žiak	2. žiak	3. žiak	4. žiak	úloha	bonus
7	7	7	7	3,80	2
7	7	7	8	3,70	2
7	7	7	9	3,60	2
7	7	8	8	3,60	2
7	7	8	9	3,50	2
7	7	9	9	3,40	2
7	8	8	8	3,50	2
7	8	8	9	3,40	2
7	8	9	9	3,30	2
7	9	9	9	3,20	2
8	8	8	8	3,40	2
8	8	8	9	3,30	2
8	8	9	9	3,20	2
8	9	9	9	3,10	2
9	9	9	9	3,00	2

Zadania starších ročníkov nájdete na `strom.sk/matik/akcie/lomihlav`.

autori:	Martin Dudjak, Katarína Farbulová, Filip Feher, Bianka Gurská, Gertrúda Matej Hanusová, Branislav Ječim, Eva Krajčiová, Matúš Libák, Lívia Lukáčová, Matúš Masrna, Lujza Milotová, Erik Novák, Martina Osuská, Patrik Paľovčík, Natália Poliačiková, Richard Prikler, Michal Revický, Oliver Seman, Richard Semanišin, Simona Stahovcová, Jakub Stramba, Magdaléna Škriabová, Martin Šmilňák, Daniel Takáč, Natália Tkáčová, Ľubomír Vargovčík, Štefan Vašak, Michal Vodička
recenzia a úprava:	Nina Hudáková, Erik Novák, Richard Prikler, Oliver Seman
názov:	**Lomihlav – 20.11.2026**
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
web:	`strom.sk/matik/akcie/lomihlav`