STROM



Košický Matboj

Košice, 23. 10. 2026

1. časť

Úloha 1.0: Aký je súčet čísel, ktoré povedal hlásateľ času počas tohto kola?

Úloha 1.1: Mimi šla na nákup za 200 eur. Platiť chcela len bankovkami s nominálnou hodnotou 200, 100, 50 a 20 eur. Koľkými spôsobmi môže nákup zaplatiť?

Výsledok: 7

Riešenie: Na začiatok si hneď môžeme všimnúť, že najjednoduchšie je, ak Mimi zaplatí jednou 200-eurovou bankovkou.

Teraz sa poďme pozrieť na také možnosti, v ktorých použije aspoň jednu 100-eurovú bankovku. V týchto možnostiach môžeme zvyšných 100 eur zaplatiť ako 100, $2 \cdot 50$ alebo $5 \cdot 20$, čím získame ďalšie 3 možnosti platenia.

Ďalej nájdime všetky také možnosti, v ktorých použije aspoň jednu 50-eurovú bankovku a žiadnu 100-eurovú bankovku. Takéto možnosti sú 2, a to $50 \cdot 4$ a $50 \cdot 2 + 20 \cdot 5$.

Je jednoduché si uvedomiť, že neexistuje taká možnosť, v ktorej by Mimi mohla použiť nepárny počet 50-eurových bankoviek. V takom prípade by totiž zostávajúcu sumu (50 alebo 150) nevedela vyskladať zo zvyšných bankoviek s hodnotami 20 a 100.

Poslednou možnosťou je, ak Mimi použije len 20-eurové bankovky.

Nákup teda môže zaplatiť $1 + 3 + 2 + 1 = 7$ spôsobmi.

Úloha 1.2: Ak by Braňo dorazil domov o dve hodiny neskôr, ako naozaj prišiel, tak by do polnoci ostávala len tretina času, ktorý by do polnoci ostával, ak by sa omeškal iba o jednu hodinu. Kedy prišiel Braňo domov?

Výsledok: 21 : 30

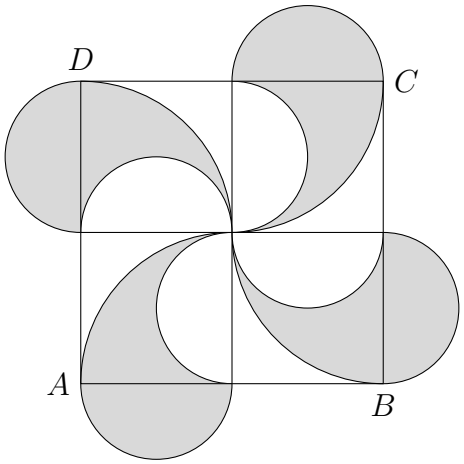
Riešenie: Čas ostávajúci do polnoci, ak by Braňo dorazil domov o hodinu neskôr, si označme ako x. Ak by Braňo dorazil domov o dve hodiny neskôr, do polnoci by ostávalo už len $\frac{1}{3}x$.

Keďže rozdiel medzi týmito príchodmi je 1 hodina a čas ostávajúci do polnoci sa počas nej skrátil o $\frac{2}{3}x$, vieme si to takto zapísať:

$$\begin{aligned} 1 \text{ hodina} &= \frac{2}{3}x \\ x &= \frac{3}{2} \text{ hodiny} \\ x &= 1.5 \text{ hodiny} \end{aligned}$$

Z toho vieme, že ak by Braňo domov dorazil o hodinu neskôr, do polnoci by ostávalo 1.5 hodiny, teda by dorazil o 22 : 30. Preto domov dorazil o 21 : 30.

Úloha 1.3: Určte obsah sivej časti, ak sa útvar skladá z kruhových oblúkov a strana štvorca $ABCD$ má dĺžku 64.



Výsledok: $32^2\pi = 1024\pi$

Riešenie: Štvorec $ABCD$ je rozdelený na 4 menšie zhodné štvorce, ako vidno na obrázku.

Obsah sivej časti vnútri každého z malých štvorcov vieme vypočítať ako rozdiel obsahu štvrtiny kruhu, ktorého polomer je polovica strany veľkého štvorca, a obsahu bieleho polkruhu, ktorého priemer je polovica strany štvorca.

Môžeme si však všimnúť, že s každým z malých štvorcov zdieľa stranu sivý polkruh, ktorý vyčnieva z veľkého štvorca. Priemer tohto polkruhu je polovica strany štvorca, a teda je zhodný s polkruhom, ktorého obsah sme museli v prvej časti riešenia odčítať.

Obsah sivej časti v jednom malom štvorci a sivom polkruhu, ktorý s ním susedí, je preto rovnaký ako obsah štvrtiny kruhu s polomerom rovným polovici strany štvorca. Vypočítame ho ako:

$$\frac{r^2 \cdot \pi}{4} = \frac{32^2 \cdot \pi}{4}$$

Vypočítali sme teda obsah sivej časti a susediaceho polkruhu v jednom malom štvorci. Keďže malé štvorčeky a polkruhy s nimi susediace sú na obrázku 4, obsah celej sivej časti v útvare je:

$$\frac{32^2 \cdot \pi}{4} \cdot 4 = 32^2 \cdot \pi = 1024 \cdot \pi$$

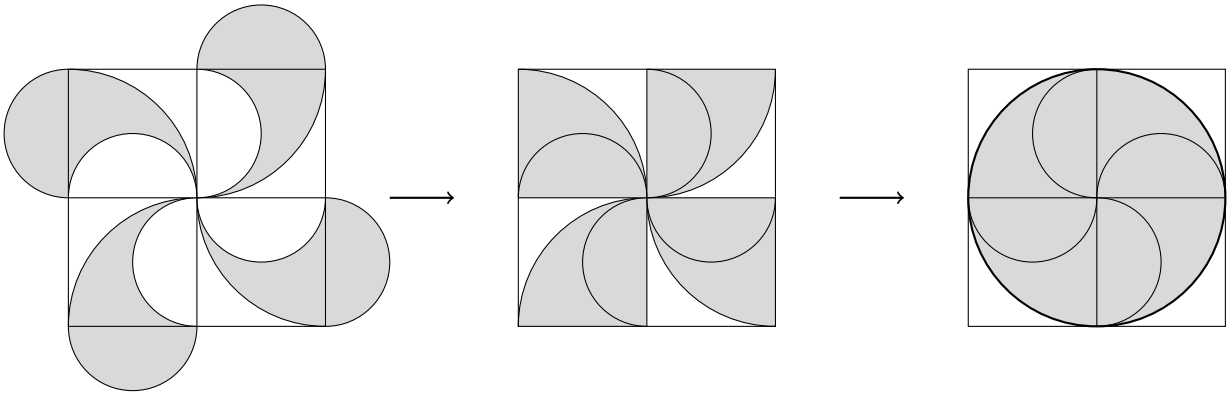
Iné riešenie:

Úloha sa dala vyriešiť aj inak. Sivé oblasti na obrázku môžeme presunúť tak, aby sa nám obsah celej sivej časti počítal jednoduchšie.

Všimnime si, že sivé polkruhy, ktoré z veľkého štvorca trčia von, majú polomer rovný polovici jeho strany. To znamená, že majú rovnaký obsah ako biele polkruhy vo vnútri štvorca. Tieto sivé polkruhy si teda vieme „presunúť“ na miesto bielych (tak, ako je to na obrázku).

Takto nám v každom malom štvorci vznikol sivý štvrťkruh s rovnakým polomerom 32. Keď si tieto štvrťkruhy správne pootočíme, vytvoria nám jeden veľký sivý kruh. Tento kruh má rovnaký obsah ako pôvodné sivé časti a vieme ho ľahko vypočítať:

$$32^2 \cdot \pi = 1024 \cdot \pi$$



Úloha 1.4: Martin má modré, zelené a červené guľôčky. Zistil, že 2 zelené guľôčky vážia toľko ako 2 červené guľôčky spolu s 1 modrou guľôčkou, a zároveň zistil, že 1 zelená a 1 červená guľôčka spolu vážia toľko ako 2 modré guľôčky. Koľkými spôsobmi vie zo zelených a červených guľôčok vybrať guľôčky tak, aby vážili toľko ako 15 modrých guľôčok?

Výsledok: 5

Riešenie: Označme si hmotnosti guľôčok ako M, Z, C. Zo zadania vieme, že:

$$\begin{aligned} 2Z &= 2C + M \\ Z + C &= 2M \end{aligned}$$

Ak si teraz vyjadríme z druhej rovnice M ako $\frac{Z+C}{2}$ a následne dosadíme do prvej rovnice, dostávame:

$$\begin{aligned} 2Z &= 2C + \frac{Z+C}{2} \\ 4Z &= 4C + Z + C \\ 3Z &= 5C \end{aligned}$$

Z tohto vidíme, že hmotnosti Z, C sú v pomere $5 : 3$. Z vyjadrenia $M = \frac{Z+C}{2}$ potom vidíme, že celkový pomer je $C : M : Z = 3 : 4 : 5$. $15M$ dokopy tvorí $15 \cdot 4 = 60$ dielov v tomto pomere. Každá červená guľôčka tvorí 3 diely a každá zelená tvorí 5 dielov. Hmotnosť 15M tak vieme z červených a zelených guľôčok vyskladať nasledujúcimi spôsobmi:

$$15M = 20C + 0Z = 15C + 3Z = 10C + 6Z = 5C + 9Z = 0C + 12Z$$

To je dokopy 5 spôsobov.

Úloha 1.5: Nájdite všetky štvorice kladných celých čísel $a > b > c > d$ takých, že $10! = a!b!c!d!$.

Výsledok: $(7, 5, 3, 1)$

Riešenie: Najprv si urobíme prvočíselný rozklad 10!:

$$\begin{aligned} 10! &= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ 10! &= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \end{aligned}$$

Keďže zo zadania vieme, že $10! = a!b!c!d!$, tak prvočíselný rozklad $a!b!c!d!$ bude rovnaký ako prvočíselný rozklad 10!, a teda $a!b!c!d! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Najväčšie použité prvočíslo je 7, takže najmenšia možná hodnota a, ktoré je zo štvorice najväčšie, je 7. Vyskúšajme túto možnosť:

$$\begin{aligned} a &= 7 \\ a! &= 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ a! &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

Číslo b teraz môže byť najviac 6. Overme teda túto možnosť:

$$\begin{aligned} b &= 6 \\ b! &= 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ b! &= 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \end{aligned}$$

Tu však vznikne spor, pretože $a!b! = 7! \cdot 6! = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7) \cdot (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5) = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 = 10!$. To by totiž znamenalo, že čísla c, d sú obe rovné 1, čo je v rozpore so zadaním, keďže $c > d$.
Z toho vyplýva, že $b = 5$ (ak by sa rovnalo 4, v prvočíselnom rozklade súčinu $a!b!c!d!$ by nám chýbala jedna 5). Takže:

$$\begin{aligned} b &= 5 \\ b! &= 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ b! &= 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \end{aligned}$$

Teraz zistíme, aké hodnoty môžu mať c, d:

$$\begin{aligned} a!b!c!d! &= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \\ 7!5!c!d! &= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \\ 2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot c!d! &= 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \\ (2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7) : (2^7 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7) &= c!d! \\ c!d! &= 2 \cdot 3 \end{aligned}$$

To znamená, že c musí byť aspoň 3, čo by znamenalo:

$$\begin{aligned} c &= 3 \\ c! &= 3 \cdot 2 \cdot 1 \end{aligned}$$

A teda aby platil prvočíselný rozklad $d = 1$, keďže $1! = 1$. Zároveň c nemôže byť 4 alebo viac, keďže v prvočíselnom rozklade ostala už len jedna 2 a $4 = 2 \cdot 2$.
Jedna štvorica teda je $a = 7, b = 5, c = 3, d = 1$.
Overme, či neexistuje ešte iná. Ak by a bolo o 1 väčšie, nastalo by toto:

$$\begin{aligned} a &= 8 \\ a! &= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \\ a! &= 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \end{aligned}$$

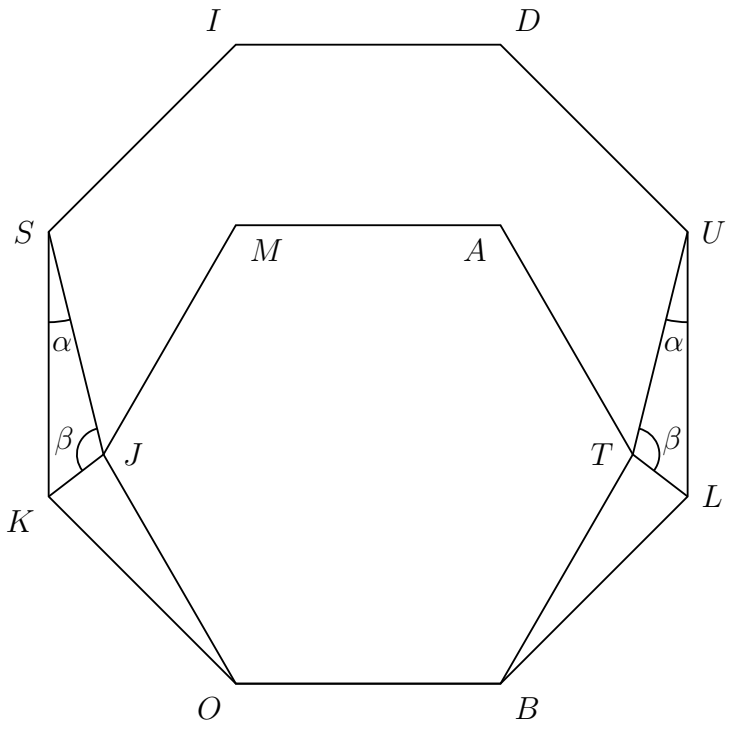
Potom by $b!c!d! = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$, čo už nie je možné, lebo b by stále muselo mať aspoň hodnotu 5 a $5! > 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.
Preto existuje iba jedna štvorica, a to $(7, 5, 3, 1)$.

Úloha 1.6: Pravidelný šesťuholník $MATBOJ$ a pravidelný osemuholník $BLUDISKO$ zdieľajú stranu BO a šesťuholník $MATBOJ$ leží v osemuholníku $BLUDISKO$. Aký je súčet veľkostí uhlov JSK a LTU?

Výsledok: 127.5°

Riešenie: Keďže je útvar osovo súmerný podľa priamky prechádzajúcej stredmi strán BO, AM a DI, platí: $|\sphericalangle TUL| = |\sphericalangle JSK|$ a $|\sphericalangle LTU| = |\sphericalangle KJS|$. Označme uhly TUL a JSK ako α a uhly LTU a KJS ako β. Našim cieľom je teda zistiť hodnotu $\alpha + \beta$.

Uhol JOK má veľkosť 15°, pretože jeho veľkosť je rovná rozdielu veľkostí vnútorných uhlov pravidelného osemuholníka a šesťuholníka, teda $135° - 120°$. Zo zadania vyplýva, že osemuholník a šesťuholník majú rovnaké dĺžky strán. Vieme teda, že $|OK| = |OJ|$, a preto je trojuholník OKJ rovnoramenný so základňou KJ a $|\sphericalangle OJK| = |\sphericalangle OKJ| = \frac{180° - 15°}{2} = 82.5°$. Preto pre uhol JKS platí, že jeho veľkosť je rovná $135° - 82.5° = 52.5°$. Z toho už v trojuholníku JKS vyplýva, že $\alpha + \beta = 180° - 52.5° = 127.5°$.



Úloha 1.7: Čarovné číslo je také 5-ciferné číslo, ktorého cifry zľava doprava sú postupne jeho zvyškami po delení číslami 2, 3, 4, 5, 6. Vypíšte všetky čarovné čísla.

Výsledok: 11311

Riešenie: Označme si čarovné číslo ako $\overline{ABCDE}$.

Všimnime si, že cifra E jednoznačne určuje cifru A a cifru D. Cifra A totiž reprezentuje zvyšok po delení 2 a cifra D po delení 5, pričom deliteľnosť týmito číslami závisí iba od poslednej cifry. Cifra C je navyše jednoznačne určená dvojčíslím $\overline{DE}$, pretože deliteľnosť 4 závisí od posledného dvojčíslia. Cifra B je tiež určená cifrou E, pretože zvyšok po delení 3 je rovnaký ako zvyšok po delení 6, ktorý cifra E reprezentuje. Na nájdenie všetkých možností nám preto stačí rozobrať možnosti pre cifru E.

Cifra E nesmie byť párna, pretože čarovné číslo musí byť päťciferné a v takom prípade by $A = 0$. Navyše musí E reprezentovať zvyšok po delení 6. Ostávajú nám preto 3 možnosti:

- $E = 5$

  V takom prípade by $A = 1$, $D = 0$, $C = 1$ (pretože posledné dvojčíslie by bolo 05) a $B = 2$ (pretože ak zvyšok po delení 6 je 5, tak zvyšok po delení 3 musí byť 2). Ciferný súčet je ale $1+2+1+0+5 = 9$, čo je v rozpore s cifrou B, ktorá by podľa neho mala byť rovná 0. V tomto prípade preto nevyjde žiadna možnosť.

- $E = 3$

  Vtedy by $A = 1$, $D = 3$, $C = 1$ a $B = 0$. Ciferný súčet je $1 + 0 + 1 + 3 + 3 = 8$, čo však nedáva zvyšok 0 po delení 3, ako predpisuje B. Opäť nedostávame žiadnu možnosť.

- $E = 1$

  V tomto prípade bude $A = 1$, $D = 1$, $C = 3$ a $B = 1$. Ciferný súčet $1 + 1 + 3 + 1 + 1 = 7$ dáva zvyšok 1 po delení 3, čo sedí s cifrou B. Dostávame preto jednu možnosť, a to 11311.

Ľahko overíme, že číslo 11311 spĺňa všetky podmienky zo zadania.

Úloha 1.8: Určte počet usporiadaných 2026-tíc $(a_1, a_2, \ldots, a_{2026})$ vzniknutých zoradením prvkov množiny $\{1, 2, \ldots, 2026\}$ takých, že číslo

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \ldots (a_{2026} - 2026)$$

je nepárne.

Výsledok: $(1013!)^2$

Riešenie: Uvedomme si, že ak by ľubovoľná z uvedených zátvoriek tvaru $(a_i - b_i)$ mala párnu hodnotu, bol by aj celkový súčin párny. Na to, aby bol súčin nepárny, nesmie byť žiadna zo zátvoriek párna. Platí aj opak, že ak sú všetky zátvorky nepárne, aj súčin je nepárny.

Zátvorka $(a_i - b_i)$ má nepárnu hodnotu práve vtedy, keď a_i a b_i sú rôznej parity. Keďže sú to celé čísla od 1 do 2026, celkovo je $2026/2 = 1013$ párnych a rovnako 1013 nepárnych a_i, ale aj b_i.

Všetkých 1013 nepárnych a_i musí byť umiestnených do 1013 zátvoriek s párnymi b_i. a_1 môže byť v každej z 1013 zátvoriek. Pre každé umiestnenie a_1 môže byť a_2 v každej z $1013 - 1 = 1012$ zvyšných zátvoriek. Podobne sa pre každé ďalšie a_i počet zátvoriek, v ktorých môže byť, zníži o 1, a teda takýchto zoradení existuje $1013 \cdot 1012 \cdot 1011 \cdot \cdots \cdot 1$. Takéto číslo značíme aj 1013!.

Zároveň pre každé takéto vyhovujúce zoradenie nepárnych a_i musí vyhovovať aj zoradenie párnych a_i. Počet a_i je 1013 a nutne musia byť v 1013 zvyšných zátvorkách s práve nepárnymi b_i a teda ich je podobne 1013!.

Každé priradenie všetkých a_i zátvorkám jednoznačne určuje ich zoradenie, a teda všetkých vyhovujúcich zoradení je $1013! \cdot 1013! = (1013!)^2$.

Úloha 1.9: Nech f je funkcia taká, že:

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Tri reálne čísla a, b, c spĺňajú:

$$a + b + c = 6$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 7$$

Určte hodnotu:

$$f(a, b) + f(b, c) + f(c, a)$$

Výsledok: 39

Riešenie: Každú z funkcií vo výraze $f(a,b)+f(b,c)+f(c,a)$ môžeme prepísať podľa $f(x,y)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}$. Po prepísaní dostaneme výraz:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}$$

Pozrime sa na zvyšné dve podmienky, ktoré sme nevyužili. V druhej podmienke sa vyskytujú hodnoty a, b a c v menovateľoch, teda po vynásobení prvou podmienkou by sme mali tieto hodnoty v čitateľoch aj menovateľoch jednotlivých vzniknutých zlomkov. To pripomína výraz, ktorý sme dostali prepísaním súčtu funkcií.

Po vynásobení výrazov $a+b+c$ a $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ dostaneme výraz:

$$\frac{a}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{c}$$

Vieme, že súčin týchto výrazov je $6\cdot 7=42$. Po roznásobení sme dostali tri zlomky, ktoré majú rovnakú premennú v čitateli aj menovateli, teda hodnota každého z nich je 1. Po odstránení týchto 3 zlomkov teda dostaneme takýto výraz a jeho hodnota je 39.

$$\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$$

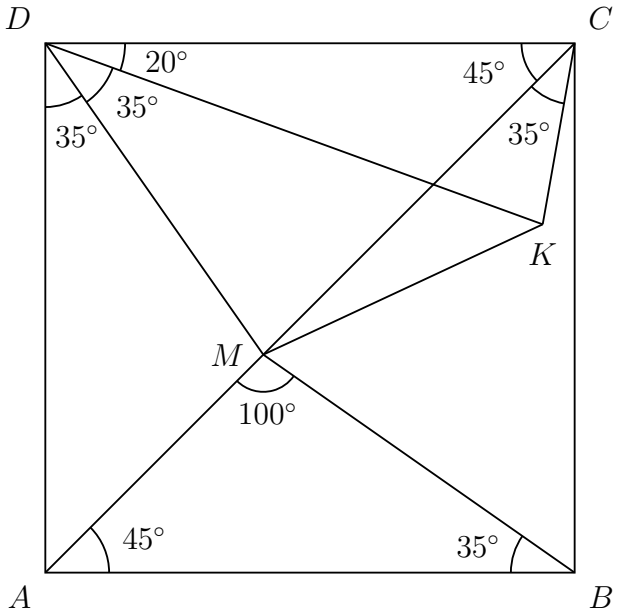
Môžeme si všimnúť, že sme dostali rovnaký výraz ako na začiatku po prepísaní súčtu funkcií. Hodnota výrazu $f(a,b)+f(b,c)+f(c,a)$ je teda 39.

Úloha 1.10: Vo vnútri štvorca $ABCD$ sú zvolené body K a M. Bod M leží vo vnútri trojuholníka ABD a bod K vo vnútri trojuholníka BMC tak, že trojuholníky BAM a DKM sú zhodné ($|AM|=|KM|$, $|BM|=|MD|$, $|AB|=|KD|$) a $|\sphericalangle AMB|=100^\circ$. Určte veľkosť uhla KCM.

Výsledok: 35°

Riešenie: Zo zadania vieme, že $|BM|=|MD|$, čo znamená, že bod M je rovnako vzdialený od dvoch protiľahlých vrcholov štvorca $ABCD$ (od vrcholov B a D). Bod M preto leží na uhlopriečke AC tohto štvorca (keďže zároveň vieme, že M leží vo vnútri štvorca $ABCD$, lebo leží vo vnútri trojuholníka ABD). Veľkosť uhla BAM je preto 45°. Veľkosť uhla ABM vieme potom dopočítať pomocou trojuholníka ABM ako:

$$|\sphericalangle ABM|=180^\circ-|\sphericalangle BMA|-|\sphericalangle MAB|=180^\circ-100^\circ-45^\circ=35^\circ$$



Trojuholníky ABM a ADM sú zhodné podľa vety *sus*, keďže zdieľajú stranu AM, úsečky AB a AD sú rovnako dlhé strany štvorca $ABCD$ a $|\sphericalangle BAM| = |\sphericalangle DAM| = 45°$, lebo AC je uhlopriečka. Z toho vyplýva, že $|\sphericalangle MDA| = |\sphericalangle MBA| = 35°$.

Keďže sú trojuholníky zhodné, platí $|\sphericalangle KDM| = |\sphericalangle ABM| = 35°$. Keďže $|\sphericalangle MDC| \geq 45°$, tak celý trojuholník BMC leží v jednej polrovine určenej priamkou DM. Zo zadania vieme, že bod K leží vo vnútri trojuholníka BMC, teda určite leží v tej istej polrovine určenej priamkou DM ako bod C. To nám umožňuje dopočítať veľkosť uhla CDK ako:

$$|\sphericalangle CDK| = 90° - |\sphericalangle MDA| - |\sphericalangle KDM| = 90° - 35° - 35° = 20°$$

Ďalej zo zhodnosti zo zadania vyplýva, že úsečka DK má rovnakú dĺžku ako strana štvorca $ABCD$. Trojuholník KCD je teda rovnoramenný so základňou KC. Jeho vnútorný uhol KCD vieme preto dopočítať ako:

$$|\sphericalangle KCD| = \frac{180° - |\sphericalangle CDK|}{2} = \frac{180° - 20°}{2} = 80°$$

Keďže vieme aj $|\sphericalangle MCD| = 45°$ (pretože M leží na uhlopriečke AC), môžeme určiť veľkosť uhla KCM ako:

$$|\sphericalangle KCM| = |\sphericalangle KCD| - |\sphericalangle MCD| = 80° - 45° = 35°$$

Úloha 1.11: Určte počet usporiadaných trojíc (a, b, c) nezáporných celých čísel spĺňajúcich rovnosť:

$$ab + bc + ca = 2(a + b + c)$$

Výsledok: 17

Riešenie: Všimnime si, že ak vyhovuje usporiadaná trojica (a, b, c), vyhovuje aj každá ďalšia permutácia týchto troch prvkov. Preto môžeme predpokladať, že $a \geq b \geq c$ a nakoniec len započítame všetky iné permutácie každého riešenia.

Ak je $c > 2$, potom platí $ab > 2a$, $bc > 2b$ a $ca > 2c$, teda celá pravá strana je menšia ako tá ľavá a rovnosť nikdy nenastane.

Ak $c = 2$, tak dostávame $ab + 2b + 2a = 2a + 2b + 4$, teda $ab = 4$. Keďže platí $a \geq b \geq 2$, tak nutne $a = b = 2$ a dostávame jedno riešenie, a to $(a, b, c) = (2, 2, 2)$.

Ak $c = 1$, tak dostávame $ab + b + a = 2a + 2b + 2$, čo vieme upraviť na $ab - a - b = 2$. Na ľavej strane si vieme všimnúť, že je tam takmer súčin $(a - 1)(b - 1)$, chýba nám však ešte 1. Pripočítame teda 1 k obom stranám a dostaneme $(a - 1)(b - 1) = 3$. Keďže sa 3 dá zapísať ako súčin dvoch celých čísel, ktoré sú väčšie alebo rovné -1 iba jedným spôsobom $(1 \cdot 3)$ a platí $a \geq b$, tak nutne $a - 1 = 3$ a $b - 1 = 1$, čiže $a = 4$ a $b = 2$. Dostávame tak jedno neusporiadané riešenie $(a, b, c) = (4, 2, 1)$, z ktorého, keďže má všetky hodnoty rôzne, dostaneme 6 usporiadaných riešení, ktorými budú všetky permutácie trojice $(4, 2, 1)$.

Ak $c = 0$, tak dostávame $ab = 2a + 2b$. Z toho podobnou úpravou ako v predošlom prípade dostaneme $(a-2)(b-2) = 4$. Potrebujeme teda zapísať číslo 4 ako súčin dvoch celých čísel väčších alebo rovných -2. Na to máme tri možnosti:

- $2 \cdot 2$. Potom $a = b = 4$. Z trojice $(4, 4, 0)$ dostaneme 3 usporiadané riešenia.
- $1 \cdot 4$. Potom $a = 6$ a $b = 3$. Z trojice $(6, 3, 0)$ dostaneme 6 usporiadaných riešení.
- $(-2) \cdot (-2)$. Potom $a = b = 0$ a máme jednu usporiadanú trojicu $(0, 0, 0)$.

Dohromady tak dostávame $1 + 6 + 3 + 6 + 1 = 17$ usporiadaných trojíc (a, b, c), ktoré spĺňajú rovnosť zo zadania.

Úloha 1.12: Paťo a Taly hrajú hru. Striedavo hádžu klasickou šesťstennou hracou kockou, až kým niekto nevyhrá. Ak niekedy nastane situácia, že padlo číslo od 1 do 3 vrátane a následne číslo 1 alebo 2, vyhrá Paťo. Ak zase dvakrát po sebe padne číslo od 4 do 6 vrátane, tak vyhrá Taly. Aká je pravdepodobnosť, že vyhrá Paťo?

Výsledok: $\frac{3}{7}$

Riešenie: Nech p_{1-3} je pravdepodobnosť, že Paťo vyhrá, ak ako posledné padlo číslo od 1 do 3 vrátane a ešte nevyhral a p_{4-6} je pravdepodobnosť, že Paťo vyhrá, ak ako posledné padlo číslo od 4 do 6 vrátane a Taly ešte nevyhrala.

Zistime najprv, koľko je p_{4-6}. Je pravdepodobnosť 1/2, že opäť padne číslo od 4 do 6 a Paťo hneď prehrá. Vyhovuje nám preto len druhá možnosť, teda že padne číslo od 1 do 3, na ktorú je tiež pravdepodobnosť 1/2. Po tomto hode má Paťo pravdepodobnosť p_{1-3}, že vyhrá, preto:

$$p_{4-6} = \frac{1}{2}p_{1-3}$$

Teraz sa pozrime na p_{1-3}. Ak padlo ako posledné číslo od 1 do 3, môžu nastať tieto prípady:

- Padne číslo 1 alebo 2 – na túto možnosť je pravdepodobnosť 1/3 a Paťo okamžite vyhrá.
- Padne číslo 3 – na túto možnosť je pravdepodobnosť 1/6 a dostaneme sa do úplne rovnakého stavu. Pravdepodobnosť, že v tomto stave vyhrá Paťo, je teda opäť p_{1-3}.
- Padne číslo od 4 do 6 – na túto možnosť je pravdepodobnosť 1/2 a Paťo v nej vyhrá s pravdepodobnosťou p_{4-6}.

Spojením týchto troch prípadov tak vieme, že:

$$p_{1-3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}p_{1-3} + \frac{1}{2}p_{4-6}$$

Tým dostávame sústavu dvoch rovníc o dvoch neznámych:

$$\begin{aligned} p_{4-6} &= \frac{1}{2}p_{1-3} \\ p_{1-3} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}p_{1-3} + \frac{1}{2}p_{4-6} \end{aligned}$$

Dosadením prvej rovnice do druhej a postupnými úpravami dostaneme:

$$\begin{aligned} p_{1-3} &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6}p_{1-3} + \frac{1}{4}p_{1-3} \\ \frac{7}{12}p_{1-3} &= \frac{1}{3} \\ p_{1-3} &= \frac{4}{7} \end{aligned}$$

Potom z prvej rovnice vieme, že:

$$p_{4-6} = \frac{1}{2}p_{1-3} = \frac{2}{7}$$

Teraz už nám zostáva len vyjadriť pravdepodobnosť, že Paťo vyhrá pred prvým hodom kocky. Je pravdepodobnosť 1/2, že padne číslo od 1 do 3 a taktiež pravdepodobnosť 1/2, že padne číslo od 4 do 6. Keďže sme vyjadrili pravdepodobnosti na výhru v oboch prípadoch, tak pravdepodobnosť, že Paťo vyhrá, je:

$$\frac{1}{2}p_{1-3} + \frac{1}{2}p_{4-6} = \frac{2}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

2. časť

Úloha 2.1: Pred večerou na kuchynskom stole leží niekoľko lyžíc, vidličiek a nožov, dokopy 10 kusov. Deti jedia večeru lyžicou a dospelí vidličkou a nožom zároveň. Koľko rôznych počtov detí môže byť pri stole, ak každý dostal svoj príbor a všetky príbory boli rozdané? (Na večeri môže byť aj 0 detí alebo 0 dospelých.)

Výsledok: 6

Riešenie: Dospelých môže byť najviac 5, pretože ak si každý z nich zoberie vidličku a nôž, na stole nezostane žiadny ďalší kus príboru. Ak chceme jedného dospelého nahradiť deťmi, namiesto jednej vidličky a jedného noža musia na stôl pribudnúť dve lyžice, ktoré dostanú dve deti. Každého dospelého vieme takto nahradiť dvoma deťmi, aby sme dodržali podmienky zo zadania. Ich počet bude preto vždy párny. Možné počty dospelých a detí sú teda tieto:

- 5 dospelých, 0 detí;
- 4 dospelí, 2 deti;
- 3 dospelí, 4 deti;
- 2 dospelí, 6 detí;
- 1 dospelý, 8 detí;
- 0 dospelých, 10 detí.

Počet detí môže mať 6 rôznych hodnôt.

Úloha 2.2: Je daný obdĺžnik. Keby sme jeden z jeho rozmerov zväčšili o 8, jeho obsah by sa zväčšil o 24. Keby sme však o 8 zväčšili jeho druhý rozmer, jeho obsah by sa zväčšil o 56. Aký je obsah daného obdĺžnika?

Výsledok: 21

Riešenie: Rozmery daného obdĺžnika si môžeme označiť ako a a b. Jeho obsah teda vypočítame ako $S = a \cdot b$.

Zo zadania vieme, že keď zväčšíme jeden z rozmerov obdĺžnika (bez ujmy na všeobecnosti to môže byť rozmer a), obsah obdĺžnika sa zväčší o 24. Rovnicou to zapíšeme takto:

$$(a + 8)b = S + 24$$

Po roznásobení zátvorky dostaneme:

$$ab + 8b = S + 24$$

Môžeme si všimnúť, že sa v rovnici nachádza súčin $a \cdot b$, o ktorom sme si už na začiatku riešenia povedali, že predstavuje obsah obdĺžnika S.

$$S + 8b = S + 24$$

Od oboch strán rovnice odčítame S:

$$8b = 24$$
$$b = 3$$

Zistili sme teda veľkosť jedného z rozmerov obdĺžnika. Rovnakým postupom môžeme zistiť aj druhý rozmer:

$$\begin{aligned} a(b+8) &= S+56 \\ ab+8a &= S+56 \\ S+8a &= S+56 \\ 8a &= 56 \\ a &= 7 \end{aligned}$$

Rozmery obdĺžnika sú 7 a 3 a jeho obsah je $7 \cdot 3 = 21$.

Úloha 2.3: Majme kladné celé čísla a, b, c s nasledujúcimi vlastnosťami:

- $a < b < c$,
- a, b, c sú prvočísla,
- súčet čísel a, b, c je 42,
- súčet rozdielov $c-a$, $c-b$ a $b-a$ je tiež 42.

Aká je hodnota čísla b?

Výsledok: 17

Riešenie: Upravme si rovnosť pre súčet rozdielov zo zadania:

$$\begin{aligned} (c-a)+(c-b)+(b-a) &= 42 \\ 2c-2a &= 42 \\ c-a &= 21 \end{aligned}$$

Všimnime si, že aby platila rovnosť $c-a=21$, potrebujeme od seba odčítať dve prvočísla tak, aby sme dostali nepárny výsledok. Nepárny rozdiel dostaneme len vtedy, ak od seba odčítavame dve čísla rôznej parity.
Z toho vyplýva, že aspoň jedno z a, c musí byť párnym číslom. Jediné párne prvočíslo je 2, ktoré je zároveň aj najmenším prvočíslom, teda sme našli jedinú možnú hodnotu a. Hodnoty c, b dopočítame takto:

$$\begin{aligned} c-a &= 21 \\ c-2 &= 21 \\ c &= 23 \\ a+b+c &= 42 \\ 2+b+23 &= 42 \\ b &= 17 \end{aligned}$$

Úloha 2.4: Slimák lezie na bleskozvod vysoký 1 m a späť. Každý deň zdolá v smere svojej cesty 11 cm a každú noc sa zošmykne o 4 cm smerom dole. Vyrazí ráno prvého dňa a po dosiahnutí vrcholu sa okamžite vydá na spiatočnú cestu. Na koľký deň sa vráti na zem?

Výsledok: 21.

Riešenie: Pri lezení hore na bleskozvod slimák spolu za jeden deň a jednu noc vylezie $11\,\text{cm} - 4\,\text{cm} = 7\,\text{cm}$. To znamená, že po 13 dňoch a nociach sa ocitne vo výške $13 \cdot 7\,\text{cm} = 91\,\text{cm}$ (pričom si uvedomme, že počas lezenia sa nachádzal najvyššie vo výške 95 cm, na konci predošlého dňa, teda ešte nedosiahol vrchol bleskozvodu a neotočil sa).

Na 14. deň vylezie najprv 9 cm smerom hore, čím dosiahne vrchol a hneď sa otočí. Potom ešte zlezie 2 cm a počas 14. noci sa zošmykne o 4 cm, teda sa na začiatku 15. dňa bude nachádzať vo výške $100\,\text{cm} - 2\,\text{cm} - 4\,\text{cm} = 94\,\text{cm}$.

Pri lezení dole z bleskozvodu slimák spolu za jeden deň a jednu noc zlezie $11\,\text{cm} + 4\,\text{cm} = 15\,\text{cm}$. To znamená, že po ďalších 6 dňoch a nociach sa ocitne vo výške $94\,\text{cm} - 6 \cdot 15\,\text{cm} = 4\,\text{cm}$. V nasledujúci 21. deň už teda prekoná tieto posledné 4 cm a dorazí do cieľa.

Úloha 2.5: Súčin deviatich po sebe idúcich kladných celých čísel je deliteľný číslom 1111. Aká je najmenšia možná hodnota, ktorú môže nadobúdať aritmetický priemer týchto deviatich čísel?

Výsledok: 97

Riešenie: Označme súčin zo zadania x. Prvočíselný rozklad čísla 1111 je $11 \cdot 101$, takže súčin x musí obsahovať číslo deliteľné 11 aj číslo deliteľné 101. Naším cieľom je nájsť najmenšiu možnú hodnotu aritmetického priemeru, takže chceme, aby jedným z deviatich čísel bolo práve číslo 101 a nie nejaký jeho väčší násobok. Hľadáme preto deväť po sebe idúcich čísel, z ktorých jedno je 101 a jedno je deliteľné 11. Keďže chceme, aby aritmetický priemer týchto deviatich čísel bol čo najmenší, bude číslo 101 najväčšie z našej devätice. Dostaneme teda deväticu: $93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101$. Obsahuje číslo 101 aj číslo 99, ktoré je deliteľné 11, celkový súčin preto bude deliteľný 1111 a aritmetický priemer je 97. Menšiu hodnotu aritmetického priemeru už dosiahnuť nevieme, pretože naša devätica musí obsahovať číslo 101.

Úloha 2.6: V pravouhlom trojuholníku ABC majú strany dĺžky $|AB| = 13$, $|AC| = 5$ a $|BC| = 12$. Na strane AB je bod D tak, že obvody trojuholníkov ACD a BCD sa rovnajú. Aký je obsah trojuholníka ACD?

Výsledok: $300/13$

Riešenie: Zo zadania vieme, že $O_{\triangle ACD} = O_{\triangle BCD}$, čo môžeme rozpísať a upraviť takto:

$$\begin{aligned} |AC| + |CD| + |AD| &= |BC| + |CD| + |BD| \\ 5 + |CD| + |AD| &= 12 + |CD| + |BD| \\ 5 + |AD| &= 12 + |BD| \\ |BD| &= |AD| - 7 \end{aligned}$$

Takto sme si vyjadrili $|BD|$.
Ďalej vieme, že $|AB| = 13$ a zároveň $|AB| = |AD| + |BD|$. Do tejto rovnosti dosadíme vyššie vyjadrené $|BD|$ a rovnosť vyriešime:

$$\begin{aligned} |AB| &= |AD| + |BD| \\ 13 &= |AD| + |AD| - 7 \\ 2|AD| &= 20 \\ |AD| &= 10 \end{aligned}$$

Teraz sa pozrieme na trojuholník ACD. Poznáme dĺžky dvoch jeho strán, no na vypočítanie jeho obsahu potrebujeme zistiť ešte dĺžku jeho výšky.
Jeho strana AD leží na strane AB v $\triangle ABC$. Protiľahlým vrcholom k týmto stranám je v oboch trojuholníkoch bod C. Preto výška v $\triangle ACD$ na stranu AD je rovnaká ako výška v $\triangle ABC$ na stranu AB. Vypočítajme teda dĺžku výšky na stranu AB v $\triangle ABC$, čím zistíme aj dĺžku výšky na stranu AD v $\triangle ACD$.
Obsah trojuholníka ABC vieme vypočítať takto:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{|AC||BC|}{2} \\ &= \frac{5 \cdot 12}{2} \\ &= 30 \end{aligned}$$

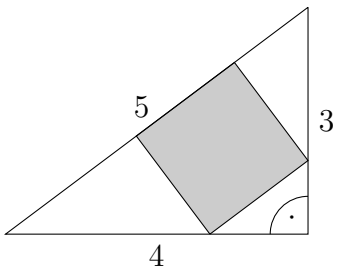
Teraz si vieme vyjadriť a dopočítať výšku na stranu AB, označme si ju ako v:

$$\begin{aligned} S_{\triangle ABC} &= \frac{|AB|v}{2} \\ 30 &= \frac{13v}{2} \\ v &= \frac{30 \cdot 2}{13} \\ v &= \frac{60}{13} \end{aligned}$$

Už poznáme dĺžku výšky na stranu AD v trojuholníku ACD. Obsah tohto trojuholníka teda vypočítame nasledovne:

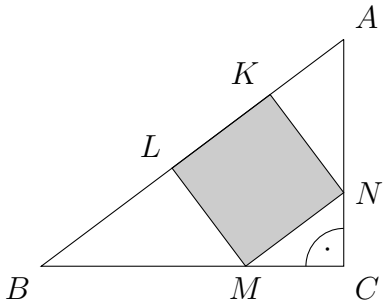
$$\begin{aligned} S_{\triangle ACD} &= \frac{|AD|v}{2} \\ &= \frac{10 \cdot \frac{60}{13}}{2} \\ &= \frac{300}{13} \end{aligned}$$

Úloha 2.7: Do pravouhlého trojuholníka s dĺžkami strán 3, 4 a 5 je vpísaný štvorec tak, že všetky jeho vrcholy ležia na stranách trojuholníka, pričom dva z nich ležia na prepone. Aký je obsah štvorca?



Výsledok: $(60/37)^2$

Riešenie: Označme si vrcholy trojuholníka A, B a C, kde $|AB| = 5$, $|BC| = 4$ a $|CA| = 3$. Vrcholy vpísaného štvorca označme K, L, M, N, pričom body K, L ležia na prepone AB v tomto poradí.



Dĺžku strany vpísaného štvorca označme x.

Všimnime si potom, že známu dĺžku strany AB vieme postupne vyjadriť pomocou x:

Uvedomme si, že $\triangle AKN \sim \triangle ACB$, keďže majú spoločný uhol $\sphericalangle BAC$ a pravé uhly $\sphericalangle AKN$, resp. $\sphericalangle ACB$. Z toho vyplýva:

$$\frac{|AK|}{|KN|} = \frac{|AC|}{|CB|}$$

Keďže $|KN| = x$, $|AC| = 3$ a $|CB| = 4$, platí:

$$\frac{|AK|}{x} = \frac{3}{4}$$
$$|AK| = \frac{3}{4}x$$

Analogicky si uvedomme, že $\triangle MBL \sim \triangle ABC$, keďže zdieľajú $\sphericalangle ABC$ a pravý uhol $\sphericalangle MLB$, resp. $\sphericalangle ACB$. Z toho vyplýva:

$$\frac{|LB|}{|LM|} = \frac{|CB|}{|CA|}$$

Keďže $|LM| = x$, $|CB| = 4$, $|CA| = 3$, platí:

$$\frac{|LB|}{x} = \frac{4}{3}$$
$$|LB| = \frac{4}{3}x$$

Potom platí:

$$|AK| + |KL| + |LB| = |AB|$$
$$\frac{3}{4}x + x + \frac{4}{3}x = |AB|$$
$$\left(\frac{3}{4} + 1 + \frac{4}{3}\right)x = |AB|$$

Keďže $|AB| = 5$:

$$\left(\frac{3}{4} + 1 + \frac{4}{3}\right)x = 5$$
$$x = \frac{5}{\frac{3}{4} + 1 + \frac{4}{3}}$$

Obsah vpísaného štvorca $KLMN$ je teda rovný:

$$x^2 = \left(\frac{5}{\frac{3}{4}+1+\frac{4}{3}}\right)^2 = \left(\frac{60}{37}\right)^2$$

Úloha 2.8: Aké je najväčšie kladné celé číslo také, že každá jeho cifra okrem prvej a poslednej je menšia ako aritmetický priemer jej susedných dvoch cifier?

Výsledok: 96433469

Riešenie: Pozrime sa na tri susedné cifry hľadaného čísla a označme ich zľava doprava a, b, c. Platí:

$$b < \frac{a+c}{2}$$

Túto nerovnosť vieme upraviť na $2b < a + c$ a odčítaním b aj c dostávame $a - b > b - c$. Keďže tieto úpravy môžeme urobiť pre ľubovoľné tri po sebe idúce cifry v hľadanom čísle, tak platí, že rozdiel každých dvoch susedných cifier postupne klesá.

Keďže rozdiely medzi ciframi klesajú, tak sa do istého bodu budú cifry hľadaného čísla zmenšovať (rozdiely budú kladné), potom môžeme mať jeden nulový rozdiel a následne sa začnú opäť zväčšovať (rozdiely budú záporné). Vždy n-tú cifru hľadaného čísla dostaneme ako prvú cifru navýšenú o súčet prvých $n - 1$ rozdielov. Keďže každá cifra je od 0 do 9, tak rozdiel najväčšej a najmenšej cifry, teda súčet kladných rozdielov susedných cifier, je najviac 9. To znamená, že môžeme mať najviac 3 kladné rozdiely, keďže sú navzájom rôzne, $1 + 2 + 3 < 9$, ale $1 + 2 + 3 + 4 > 9$.

Analogicky súčet záporných rozdielov medzi ciframi je najmenej -9, čiže môžu byť najviac 3 záporné rozdiely. Navyše môžeme mať ešte jeden nulový rozdiel. To znamená, že rozdielov môže byť dokopy najviac 7, čiže 8 cifier. Chceme čo najväčšiu prvú cifru a zároveň chceme mať zo začiatku čo najmenšie rozdiely, aby bolo výsledné číslo čo najväčšie. Najlepšie je preto zvoliť prvú cifru 9 a kladné rozdiely $3, 2, 1$. To nám dáva spolu s nulovým rozdielom prvých 5 cifier 96433. Záporné rozdiely už teraz vedia byť len $-1, -2, -3$, keďže nesmieme v súčte presiahnuť -6, aby posledná cifra bola najviac 9. Výsledné číslo je potom 96433469.

Úloha 2.9: Rovnice $x^2 + 2026ax + b = 0$ a $x^2 + 2026bx + a = 0$, kde $a \neq b$, majú spoločný reálny koreň. Aké všetky hodnoty môže ich spoločný koreň nadobúdať?

Výsledok: iba $1/2026$

Riešenie: Zo zadania vieme, že existuje reálne číslo, ktoré keď dosadíme za x, tak platia obe uvedené rovnice. Toto číslo si označme x_1. Platí teda:

$$x_1^2 + 2026ax_1 + b = 0$$

$$x_1^2 + 2026bx_1 + a = 0$$

Keď od prvej z týchto rovníc odčítame druhú, tak dostaneme:

$$\begin{aligned} 2026ax_1 - 2026bx_1 + b - a &= 0 \\ 2026x_1(a-b) &= a-b \end{aligned}$$

Z podmienky $a \neq b$ zo zadania vieme, že $a - b \neq 0$. Môžeme preto obe strany rovnice vydeliť výrazom $a - b$, pričom dostaneme ekvivalentnú rovnicu:

$$\begin{aligned} 2026x_1 &= 1 \\ x_1 &= \frac{1}{2026} \end{aligned}$$

Zistili sme teda, že ak číslo x_1 spĺňa obe rovnice zo zadania, tak spĺňa aj $x_1 = \frac{1}{2026}$. Preto je jediná hodnota, ktorú môže nadobúdať spoločný koreň rovníc zo zadania, práve $\frac{1}{2026}$.

Pre zaujímavosť, tento koreň vedia nadobudnúť obe rovnice súčasne, napr. pre hodnoty $a = -1 - \frac{1}{2026^2}$ a $b = 1$.

Úloha 2.10: Koľko je kladných celých čísel n takých, že

$$\frac{(n+1)^2}{n+23}$$

je tiež kladné celé číslo?

Výsledok: 4

Riešenie: Pre ľahšie vydelenie $n + 23$ upravme čitateľ:

$$\frac{(n+1)^2}{n+23} = \frac{n^2+2n+1}{n+23} = \frac{(n^2+23n)+(-23n+2n+1)}{n+23} = n + \frac{-21n+1}{n+23}.$$

Ďalej upravujme:

$$n + \frac{-21n+1}{n+23} = n + \frac{(-21n-21\cdot 23)+(21\cdot 23+1)}{n+23} = n + (-21) + \frac{21\cdot 23+1}{n+23}.$$

Platí $21 \cdot 23 = 483$, teda

$$n + (-21) + \frac{21\cdot 23+1}{n+23} = n + (-21) + \frac{483+1}{n+23} = n + (-21) + \frac{484}{n+23}.$$

Zo zadania chceme, aby tento výraz spĺňal dve podmienky, a to aby bol celé číslo a aby bol kladný. Aby bol celé číslo, musí byť $\frac{484}{n+23}$ celé číslo. Preto musí číslo $n + 23$ byť kladným (keďže n aj 23 sú kladné) deliteľom čísla 484.

Prvočíselný rozklad čísla 484 je $2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 11$, teda delitele (aspoň 23) môžu byť

$$2 \cdot 2 \cdot 11 = 44, \quad 11 \cdot 11 = 121, \quad 2 \cdot 11 \cdot 11 = 242, \quad 2 \cdot 2 \cdot 11 \cdot 11 = 484.$$

Máme splnenú jednu podmienku, ale ešte potrebujeme, aby bol výraz kladný. Na to si ale stačí všimnúť, že vo výraze

$$n + (-21) + \frac{484}{n+23}$$

sú všetky sčítance okrem -21 kladné. Avšak aj pre naše najmenšie n, ktoré je $44 - 23 = 21$, je rozdiel $n + (-21)$ kladný, a teda pre všetky naše možné n bude výraz naozaj kladný.

Všetky naše n vyhovujú, a teda existujú 4 riešenia.

Iné riešenie:

Nech

$$\frac{(n+1)^2}{n+23} = k,$$

kde k je kladné celé číslo zo zadania. Upravíme na tvar

$$(n+1)^2 = k(n+23).$$

Ak $k \geq n+1$ a všetky činitele na oboch stranách rovnice sú kladné (čo platí), tak

$$(n+1)^2 = k(n+23) < (n+1)(n+23),$$

teda pravá strana rovnice bude ostro väčšia ako ľavá.

Preto nutne $k < n + 1$, teda $k \leq n$. Vieme preto k vyjadriť ako

$$k = n - i,$$

kde $0 \leq i < n$ je nezáporné celé číslo. Dosaďme naspäť a upravme:

$$\begin{aligned}(n+1)^2 &= (n-i)(n+23)\\ n^2 + 2n + 1 &= n^2 - in + 23n - 23i\\ 1 &= -in + 21n - 23i\\ 1 + 23i &= n(-i + 21)\end{aligned}$$

Ak $i = 21$, dostaneme $1 + 23 \cdot 22 = 0$, čo neplatí. Ak $i > 21$, tak pravá strana rovnice bude záporná a ľavá kladná, čo je tiež spor. Ostáva nám iba $0 < i \leq 20$. Od tohto bodu by sme mohli vyskúšať všetky možnosti pre i, niektoré z nich však vieme vyradiť.

Ak i je deliteľné 3, tak aj $i - 21$, a teda celá pravá strana, je deliteľná 3. Ľavá strana by ale mala zvyšok 1 po delení 3, čo je spor. Rovnako vieme odôvodniť, že i nie je násobkom 7.

Pre i nám ostali možnosti

$$i \in \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 11, 13, 16, 17, 19, 20\}.$$

Dostaneme túto tabuľku:

i	$-i + 21$	$1 + 23i$	$n = \frac{1+23i}{-i+21}$
1	20	24	
2	19	47	
4	17	93	
5	16	116	
8	13	185	
10	11	231	21
11	10	254	
13	8	300	
16	5	369	
17	4	392	98
19	2	438	219
20	1	461	461

Žiadne z možných n nie sú rovné 23, teda dostali sme 4 riešenia.

Úloha 2.11: Postupnosť je definovaná nasledovne:

- $a_1 = 1$,
- $a_2 = 2$,
- $a_3 = 3$,
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ pre všetky $n \geq 3$.

Koľko existuje neprázdnych podmnožín množiny $\{a_1, \ldots, a_{20}\}$, ktorých súčet prvkov je rovný niektorému členu tejto postupnosti (nie nutne patriacemu do množiny $\{a_1, \ldots, a_{20}\}$)?

Výsledok: 90

Riešenie: Označme zadanú množinu $M = \{a_1, \ldots, a_{20}\}$. Na začiatok sa pozrieme na to, aké hodnoty môžu nadobúdať súčty prvkov podmnožín $N \subseteq M$.

Dokážeme, že súčet členov postupnosti, kde najvyšší člen je a_k, je menší ako a_{k+2}. Potom aj súčet prvkov ľubovoľnej podmnožiny N, kde najvyšší prvok je a_k je určite menší ako a_{k+2}. Dokazujeme teda nerovnosť $\sum_{n=1}^{k} a_n < a_{k+2}$ (zápis $\sum_{n=1}^{k} a_n$ vyjadruje súčet čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$). Nerovnosť budeme dokazovať indukciou:

- pre $k = 1$ dostaneme platnú nerovnosť $a_1 < a_3$
- pre k-tý člen formulujeme indukčný predpoklad $\sum_{n=1}^{k} a_n < a_{k+2}$
- pre $(k+1)$-vý člen dostaneme nerovnosť

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{k+1} a_n &< a_{(k+1)+2} \\ a_{k+1} + \sum_{n=1}^{k} a_n &< a_{k+3} = a_{k+2} + a_{k+1} + a_k \\ \sum_{n=1}^{k} a_n &< a_{k+2} + a_k. \end{aligned}$$

V poslednej nerovnosti spoznávame náš indukčný predpoklad. Pripočítaním nezáporného člena a_k zostane nerovnosť v platnosti. Tým sme splnili predpoklady matematickej indukcie a tvrdenie $\sum_{n=1}^{k} a_n < a_{k+2}$ sme dokázali.

Dokázali sme, že súčet všetkých členov postupnosti S_k, kde najvyšší člen je a_k, je menší ako a_{k+2}. Potom určite platí, že súčet prvkov akejkoľvek podmnožiny $N \subseteq M$ je menší ako a_{k+2}, kde N obsahuje niekoľko členov postupnosti a najvyšší člen je a_k. V ďalšom postupe budeme používať nerovnosť $S_k < a_{k+2}$, kde bez ujmy na všeobecnosti môžeme ako S_k označovať súčet všetkých členov postupnosti až po a_k alebo súčet len vybraných členov, kde najvyšší člen je a_k, keďže nás zaujíma horný odhad možného súčtu prvkov skúmanej podmnožiny.

Z toho vyplýva, že akákoľvek podmnožina $N \subseteq M$ nám dá súčet prvkov rovný nanajvýš $(k+1)$-vému členu postupnosti, ak a_k je najvyšší člen N. Ľahko si rozmyslíme, že tento súčet je rovný a_k práve vtedy, keď daná podmnožina obsahuje len prvok a_k, a v inom prípade je súčet rovný a_{k+1}.

Teraz prejdeme k hľadaniu konkrétnych podmnožín. Uvažujme množinu $N \subseteq M$, ktorej prvky majú súčet rovný a_l.

V takom prípade máme na začiatok 2 možnosti: a_l nie je prvkom N, alebo a_l je prvkom N (v takom prípade je to jediný prvok N a je to jedna z našich možností). V prvom prípade môže byť najvyšší člen tejto podmnožiny prvok a_{l-1}.

Pozrime sa na možnosť, keď $a_{l-1} \notin N$. V takom prípade by mohol byť najvyšší prvok v N člen postupnosti a_{l-2}. Vieme však, že platí $S_{l-2} < a_l$ (ako sme dokázali vyššie), čo je v spore s našou úvodnou úvahou, že súčet prvkov N je rovný a_l. Ostáva nám prípad, keď $a_{l-1} \in N$.

Ďalej sa opäť pozrime na prípad, ak by platilo $a_{l-2} \notin N$. Ukážeme, že súčet prvkov N je v takom prípade určite menší ako a_l. Súčet prvkov N bude najväčší možný, ak bude N obsahovať všetky členy postupnosti menšie ako a_{l-2}, teda môže byť najviac:

$$a_1 + \cdots + a_{l-4} + a_{l-3} + a_{l-1} = S_{l-4} + a_{l-3} + a_{l-1}$$

Už ale vieme, že $S_{l-4} < a_{l-2}$, teda pre celý súčet prvkov N platí:

$$S_{l-4} + a_{l-3} + a_{l-1} < a_{l-2} + a_{l-3} + a_{l-1} = a_l$$

Ak teda $a_{l-2} \notin N$, súčet prvkov N nikdy nedosiahne hodnotu a_l.

Ostáva nám teda možnosť, kedy v podmnožine N máme oba prvky a_{l-1} aj a_{l-2}. Podobnú úvahu môžeme zopakovať pre a_{l-3}, avšak už nedostaneme jasný záver, že N musí tento člen postupnosti obsahovať. To nám dáva 2 možnosti:

- do množiny N doplníme prvok a_{l-3}, čím dostaneme jednu úplne určenú podmnožinu, ktorú hľadáme (keďže súčet jej prvkov je priamo rovný a_l podľa definície postupnosti),
- do množiny N doplníme niekoľko prvkov, ktorých súčet je rovný členu postupnosti a_{l-3}.

Ak však teraz označíme počet takýchto rôznych podmnožín N, ktorých súčet prvkov je rovný a_l ako s_l, tak dostávame rekurentný vzťah

$$s_l = 1 + s_{l-3},$$

kde 1 zohľadňuje možnosť $N = \{a_l\}$ a s_{l-3} zohľadňuje všetky možnosti, kde k prvkom a_{l-1} a a_{l-2} pridáme niekoľko prvkov, ktorých súčet je rovný a_{l-3}.

Ukážeme si to na príklade, keď $l = 4$. Podľa vzťahu dostaneme $s_4 = 1 + s_1 = 1 + 1 = 2$, kde $s_1 = 1$ je počet podmnožín M, ktorých súčet prvkov je rovný a_1. Takáto podmnožina existuje iba jedna, a to $\{a_1\}$. Ľahko overíme, že dostaneme naozaj 2 podmnožiny M, ktoré majú súčet prvkov rovný a_4: $\{a_4\}$ a $\{a_3, a_2, a_1\}$.

Teraz nám zostáva zistiť číslo s_l pre všetky $l \in \{1, \ldots, 20\}$ a sčítať, čím získame hľadaný počet rôznych neprázdnych podmnožín. Zostavíme si krátku tabuľku, kde si postupne zapíšeme počty podmnožín s_l. Pri tvorbe tabuľky si musíme dať pozor na to, že $s_3 = 2$, pretože existujú 2 podmnožiny, ktorých súčet prvkov je rovný a_3 ($\{a_3\}$ a $\{a_1, a_2\}$). Pre $l > 3$ je číslo s_l plne zadané rekurentným vzťahom.

l	s_{l-3}	$s_l = 1 + s_{l-3}$	l	s_{l-3}	$s_l = 1 + s_{l-3}$
1		1	8	2	3
2		1	9	3	4
3		2	⋮	⋮	⋮
4	1	2	17	5	6
5	1	2	18	6	7
6	2	3	19	6	7
7	2	3	20	6	7

Všimnime si, že čísla s_k sa opakujú v skupinách po troch (okrem prvej dvojice), pričom pre $k = 20$ dostaneme posledné z trojice čísel 7. Celkový počet podmnožín je teda

$$S = 1 + 1 + 3 \cdot (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) = 83.$$

Doteraz sme však rozobrali možnosti, kedy súčet prvkov množín bol rovný nanajvýš a_{20}. Ešte však môžeme mať tento súčet prvkov rovný členu postupnosti, ktorý nie je v M. Vyššie sme dokázali, že $S_k < a_{k+2}$, teda súčet S_{20} (súčet prvkov podmnožiny, ktorej najvyšší prvok je a_{20}) môže byť nanajvýš rovný a_{21}. Pre $l = 21$ dostaneme počet podmnožín $s_{21} = 8$, avšak musíme odčítať možnosť, kedy je daná podmnožina rovná $\{a_{21}\}$, keďže táto možnosť pre nás nie je prípustná. Takto dostaneme 7 dodatočných možností.

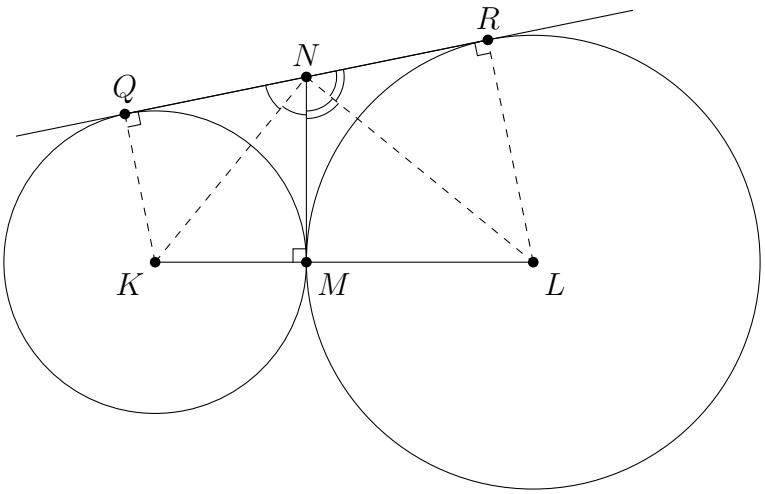
Celkový počet podmnožín je teda $83 + 7 = 90$.

Úloha 2.12: Nech K a L sú stredy a q, resp. r polomery zvonka sa dotýkajúcich kružníc a M je ich dotykový bod. Nech N je priesečník ich spoločnej dotyčnice v bode M a niektorej ich vonkajšej spoločnej dotyčnice. Vyjadrite obsah trojuholníka KNL pomocou q a r.

Výsledok: $(q+r)\sqrt{qr}/2$

Riešenie: Nech Q a R sú postupne body dotyku kružníc s ich spoločnou dotyčnicou vedenou bodom N.

Keďže priamky QR a MN sú dotyčnicami kružníc, uhly $\sphericalangle KQN$, $\sphericalangle LRN$ a $\sphericalangle KMN$ sú pravé.



Uvedomme si, že $|\sphericalangle KNQ| = |\sphericalangle KNM|$ zo súmernosti podľa NK alebo zhodnosti $\triangle KNQ$ a $\triangle KNM$ podľa vety *ssu*. Analogicky $|\sphericalangle LNM| = |\sphericalangle LNR|$. Preto:

$$|\sphericalangle KNM| + |\sphericalangle LNM| = \frac{|\sphericalangle KNQ| + |\sphericalangle KNM| + |\sphericalangle LNM| + |\sphericalangle LNR|}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

To znamená, že $\triangle KLN$ je pravouhlý, pričom M je päta výšky z N na preponu KL. Podľa Euklidovej vety o výške potom platí:

$$|NM| = \sqrt{|KM| \cdot |ML|} = \sqrt{qr}$$

Obsah $\triangle KLN$ je teda rovný:

$$\frac{|KL| \cdot |NM|}{2} = \frac{(|KM| + |ML|) \cdot |NM|}{2} = \frac{(q+r)\sqrt{qr}}{2}$$

3. časť

Úloha 3.1: V štvorci $ABCD$ je E stred strany AB a F stred strany BC. Obsah trojuholníka BFE je 2. Aká dlhá je strana štvorca?

Výsledok: 4

Riešenie:

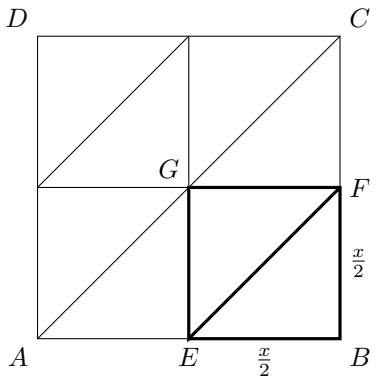
Označme stranu štvorca $ABCD$ ako x. Všimnime si, že trojuholník BFE je pravouhlý, pričom jeho odvesny $|BE|$ a $|BF|$ majú dĺžku $\frac{x}{2}$, keďže body E a F sú stredmi strán štvorca.

Obsah pravouhlého trojuholníka vo všeobecnosti vyjadríme ako $S = \frac{a \cdot b}{2}$, kde a a b sú dĺžky jeho odvesien. Po dosadení do vzorca dostávame:

$$\begin{aligned} S &= \frac{a \cdot b}{2} \\ 2 &= \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{2} \\ 4 &= \frac{x^2}{4} \\ 16 &= x^2 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Dĺžka strany štvorca $ABCD$ je teda 4.

Iné riešenie:



Pozorný riešiteľ si môže všimnúť, že trojuholník BFE zaberá presne $\frac{1}{8}$ obsahu štvorca $ABCD$. To vieme, pretože $S_{BFE} = \frac{1}{2} \cdot S_{BFGE}$, kde G je stred štvorca $ABCD$. Do štvorca $ABCD$ vieme umiestniť práve 4 menšie štvorce, ktoré majú stranu $\frac{x}{2}$, pričom jeden z nich je práve $BGFE$. Z toho už vidíme, že obsah trojuholníka BFE je $\frac{1}{8}$ obsahu štvorca $ABCD$, teda $S_{ABCD} = 8 \cdot 2 = 16$. Odtiaľ podľa vzorca pre obsah štvorca dostaneme, že dĺžka strany štvorca $ABCD$ je 4.

Úloha 3.2: Koľko existuje usporiadaných dvojíc kladných celých čísel (a, b) takých, že $a^2 + b^2 = 50$?

Výsledok: 3

Riešenie:

Čísla a, b môžu byť rovné nanajvýš 7, pretože keby jedno z nich bolo rovné 8, tak by bol súčet najmenej 65. Keďže a, b sú kladné celé čísla, vieme, že $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Ich druhé mocniny potom patria do množiny $a^2, b^2 \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$. Všimnime si, že súčet 50 dostaneme len ako $1 + 49$, $49 + 1$ a $25 + 25$. Týmto možnostiam zodpovedajú usporiadané dvojice $(1, 7)$, $(7, 1)$ a $(5, 5)$.

Zadaniu vyhovujú 3 usporiadané dvojice.

Úloha 3.3: Máme karty s číslami od 1 do 50. Koľkými spôsobmi vieme vybrať dve karty tak, aby rozdiel čísel na kartách bol 11 a súčin bol deliteľný 5? Na poradí vybraných kariet nezáleží.

Výsledok: 15

Riešenie: Aby bol súčin deliteľný 5, musí byť aspoň jedno z čísel na kartách deliteľné 5. Označme čísla na kartách a a b, pričom $a < b$.

Všimnime si, že ak a dáva po delení 5 zvyšok 4, tak b, ktoré je od neho o 11 väčšie, dáva po delení 5 zvyšok 0, teda je ním deliteľné. Aj súčin $a \cdot b$ bude potom deliteľný 5. Najmenšie takéto a je 4, druhé najmenšie je 9, najväčšie je 39. Menšie, resp. väčšie a byť nemôže, inak by sme nesplnili podmienku zo zadania, že na kartičkách sú len čísla od 1 do 50 (pre $a = 41$ by bolo $b = 55$). Všetky možnosti, keď a dáva po delení 5 zvyšok 4, sú 4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, čo je 8 možností.

Pozrime sa teraz na možnosti, keď a je deliteľné 5. Najmenšie takéto vyhovujúce a je 5, najväčšie 35. Ak by bolo $a = 40$, potom $b = 51$, čo nespĺňa podmienku zo zadania. Všetky možnosti, keď a je deliteľné 5, sú 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, čo je 7 možností.

Spolu teda máme $7 + 8 = 15$ možností.

Úloha 3.4: V obchode predávajú CD-čka za 14, 15, 21 a 28 eur. Ak Evička kúpila CD-čka dokopy za 160 eur, koľko 15-eurových kúpila?

Výsledok: 6

Riešenie: Všimnime si, že tri z cien CD-čiek $(14, 21, 28)$ sú deliteľné siedmimi. Celková cena 160 však nie je siedmimi deliteľná. Jej zvyšok po delení siedmimi je 6. To znamená, že chceme dosiahnuť, aby súčet cien kúpených CD-čiek mal tiež zvyšok 6 po delení siedmimi.

Pripočítanie cien CD-čiek s cenami deliteľnými siedmimi tento zvyšok nezmení. Pozrime sa teda na 15-eurové CD-čka. Číslo 15 dáva po delení siedmimi zvyšok 1. Takže ak si Evička kúpi šesť 15-eurových CD-čiek, bude dávať súčet cien po delení siedmimi zvyšok 6.
Viac si ich kúpiť nemohla, keďže najbližší počet, ktorý by nám dal súčet cien so zvyškom 6 po delení 7, je 13, a to už dáva súčet $13 \cdot 15 = 195$, čo je viac ako celková cena.

Teraz ešte potrebujeme ukázať, že naozaj mohla takýto nákup so šiestimi 15-eurovými CD-čkami urobiť. Evička si mohla napríklad kúpiť dve 14-eurové, dve 21-eurové a šesť 15-eurových CD-čiek, ktoré spolu stoja:

$$2 \cdot 14 + 2 \cdot 21 + 6 \cdot 15 = 28 + 90 + 42 = 160$$

Evička si kúpila šesť 15-eurových CD-čiek.

Úloha 3.5: Koľkými spôsobmi vieme vybrať niekoľko rôznych celých čísel od 1 do 6 vrátane tak, aby najmenšie z vybraných čísel bolo deliteľné počtom vybraných čísel?

Výsledok: 15

Riešenie: Ak vyberieme iba jedno číslo, máme 6 možností výberu, keďže 1 delí všetky čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Ak by sme vybrali dve čísla, najmenšie vybrané číslo by muselo byť párne. Môže to byť 2 alebo 4. Číslo 6 by to byť nemohlo, keďže je najväčšie, a teda by sme už nemohli vybrať druhé, väčšie číslo. Ak by sme teda za najmenšie vybrané číslo zvolili 2, mali by sme 4 možnosti, ako takúto dvojicu vytvoriť, a to: $(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)$. Ak by sme za najmenšie vybrané číslo zvolili 4, mali by sme len 2 možnosti, a to: $(4, 5), (4, 6)$.

Ak by sme vybrali tri čísla, najmenšie vybraté číslo by muselo byť násobkom 3. Sú to čísla 3 a 6. Číslo 6 však opäť nemôže byť najmenším vybraným číslom, preto sa pozrime na počet možností výberu, ak najmenšie vybrané číslo je 3. Sú to trojice $(3, 4, 5), (3, 4, 6), (3, 5, 6)$, teda 3 možnosti.

Ak by sme vybrali štyri čísla, najmenším vybraným číslom by mohla byť len 4 ako jediný násobok štvorky v tejto šestici. Tu však nastáva problém, keďže väčšie ako 4 sú v tejto šestici iba dve čísla. Preto by sme mohli vybrať najviac tri čísla, z ktorých by 4 bolo najmenšie.

Rovnaký problém by nastal aj pri výbere piatich a šiestich čísel. Počet možností výberu teda je $6 + 4 + 2 + 3 = 15$.

Úloha 3.6: Je daná aritmetická postupnosť $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, v ktorej $a_1 = 10$ a $a_{a_2} = 100$. Určte hodnotu $a_{a_{a_3}}$.

Výsledok: 820

Riešenie: Označme diferenciu (rozdiel susedných členov) tejto aritmetickej postupnosti d. Vieme, že člen a_2 je rovný $a_1 + d$. Pre n-tý člen aritmetickej postupnosti platí, že $a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$. Takže $a_{a_2} = a_{a_1 + d} = a_1 + d \cdot (a_1 + x - 1)$. Zo zadania vieme, že sa to rovná 100. Z tejto rovnice dopočítame d:

$$\begin{aligned} a_{a_2} &= a_1 + d \cdot (a_1 + x - 1) \\ 100 &= 10 + 10d + d^2 - d \\ 0 &= d^2 + 9d - 90 \\ 0 &= (d + 15)(d - 6) \end{aligned}$$

Táto kvadratická rovnica má dve riešenia, a to 6 a -15. Zo zadania však vidíme, že postupnosť musí byť rastúca, takže d nemôže byť záporné, preto budeme ďalej pokračovať s $d = 6$.

Teraz nám už ostáva len dopočítať hodnotu $a_{a_{a_3}}$. Začneme tým, že vypočítame hodnotu:

$$a_3 = a_1 + d \cdot (3 - 1) = 22$$

Čiže:

$$a_{a_{a_3}} = a_{a_{22}}$$

Pokračujme vypočítaním hodnoty:

$$a_{22} = a_1 + d \cdot (22 - 1) = 136$$

Čiže:

$$a_{a_{a_3}} = a_{136}$$

Posledným krokom je vypočítať hodnotu

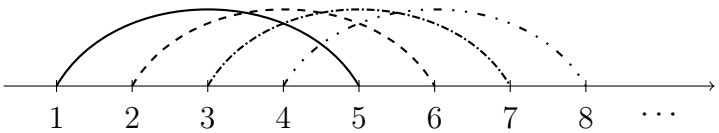
$$a_{136} = a_1 + d \cdot (136 - 1) = 820$$

Úloha 3.7: Celé čísla od 1 do 60 chceme rozdeliť do 30 dvojíc. Koľkými spôsobmi to vieme urobiť tak, aby bol rozdiel čísel v každej dvojici rovnaký?

Výsledok: 8

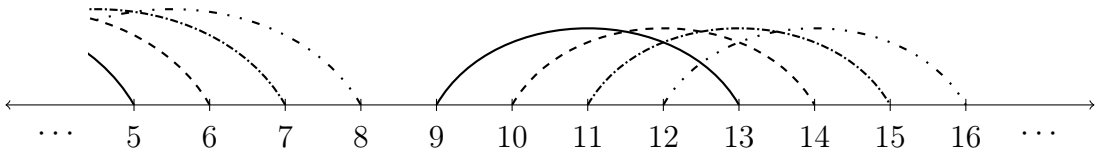
Riešenie: Môžeme spočítať počet možností tak, že sa pozrieme, koľko možností spárovania nám daný rozdiel dáva.

Zvoľme pevný rozdiel r (kladné celé číslo) čísel v dvojici a párujme čísla postupne od 1 do 60. Postup v riešení si najprv ukážeme na konkrétnom príklade $r = 4$ a potom ho rozšírime pre všeobecné r.



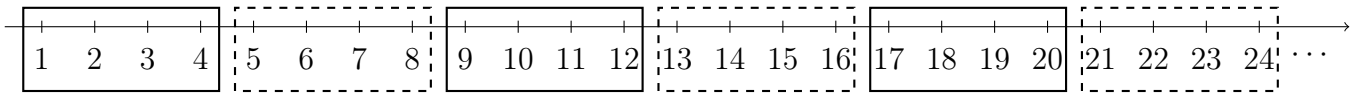
Všimnime si, že v príklade $r = 4$ majú čísla 1 až 4 iba jeden možný pár, pretože nemajú čísla o 4 „naľavo“ (teda menšie) od nich, s ktorými by sa spárovali. Tiež si môžeme všimnúť, že tým sa spárovali všetky čísla od 5 do 8.

Pre všeobecný rozdiel r majú takisto všetky čísla k od 1 do r iba jeden možný pár, a to $k + r$, čím sa spárovali aj čísla od $r + 1$ do $2r$.



Ďalej sa v príklade $r = 4$ pozrieme na čísla 9 až 12. Tie v rozmedzí 1 až 60 majú aj menších susedov, avšak tie už boli spárované s číslami z rozmedzia 1 až 4. Týmto číslam opäť neostáva nič iné, len sa spárovať so svojimi väčšími susedmi.

Vo všeobecnosti číslam od $2r+1$ do $3r$ ostáva iba jeden pár, lebo čísla od $r+1$ do $2r$ sú už spárované. Rovnako sa teda spárujú bloky čísel $2r + 1$ až $3r$ a $3r + 1$ až $4r$.



V príklade $r = 4$ takto pokračujeme ďalej, pričom každý blok štyroch čísel 1 až 4, 9 až 12, 17 až 20 a tak ďalej (v tvare $8k + 1$ až $8k + 4$, plná čiara) sa jednoznačne spáruje s celým nasledujúcim blokom štyroch čísel (čiarkovaná čiara).

Vo všeobecnosti sa blok $(2n - 2)r + 1$ až $(2n - 1)r$, kde n je kladné celé číslo, jednoznačne spáruje s celým nasledujúcim blokom čísel $(2n - 1)r + 1$ až $(2n)r$.

Číslo 60 nevieme spárovať so žiadnym väčším číslom a párujeme čísla od najmenšieho po najväčšie, preto musí byť v poslednom (čiarkovanom) bloku. Číslo 60 má teda tvar $(2n)r = 2nr$, kde n a r sú kladné celé čísla. Dostávame:

$$60 = 2nr$$
$$30 = nr$$

Rozdiel v páre r je teda nejakým deliteľom čísla 30, a počet párov blokov (jeden s plnou čiarou, jeden s čiarkovanou) má tvar $\frac{30}{r}$. V našom príklade dôjdeme k problému:

$$60 = 2n \cdot 4$$
$$30 = n \cdot 4$$
$$15/2 = n$$

čo nie je celé číslo. Naozaj, ak tento prípad vyskúšame ručne, číslo 56 sa spáruje s číslom 52, a teda číslo 60 nebude mať pár.

Dokázali sme, že každý rozdiel r nám buď nedá párovanie, alebo nám dá *jednoznačné párovanie* (v každom kroku môže mať dané číslo iba jeden pár), a teda práve jedno párovanie. Pozrime sa, pre ktoré r toto jednoznačné párovanie existuje.

Z podmienky $30 = nr$ dostávame, že r je deliteľom 30. Číslo 30 má práve 8 deliteľov, teda existuje 8 možných rozdielov v páre čísel. A keďže sme si ukázali, že pre dané r je párovanie jednoznačne určené, dostávame, že existuje práve 8 párovaní.

Úloha 3.8: Z celých čísel od 1 do 37 vrátane vyberte dvojicu čísel tak, aby súčin týchto dvoch čísel bol rovný súčtu zvyšných 35 čísel.

Výsledok: 21 a 31

Riešenie:

Súčet všetkých čísel od 1 do 37 je

$$1 + 2 + ... + 37 = \frac{37 \cdot 38}{2} = 703.$$

Keď vyberieme dve rôzne čísla a, b (nech $a < b$), súčet zvyšných 35 čísel bude $703 - a - b$. Podľa zadania má platiť

$$ab = 703 - a - b.$$

Pripočítame $a + b + 1$ k obom stranám rovnice:

$$ab + a + b + 1 = 704.$$

Ľavú stranu rovnice vieme rozložiť na súčin zátvoriek:

$$(a + 1)(b + 1) = 704.$$

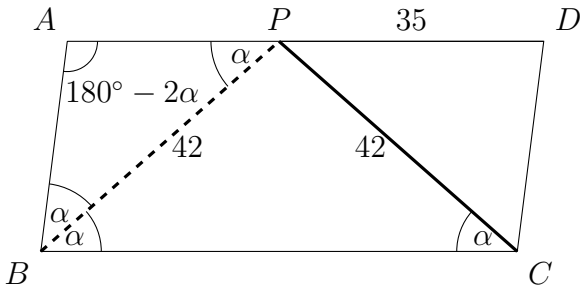
Číslo 704 vieme rozložiť na súčin prvočísel ako $2^6 \cdot 11$. Hľadáme dvojicu deliteľov $a+1, b+1$ čísla 704, pričom platí $a+1, b+1 \in \{2, 3, ..., 38\}$. Jediný vhodný rozklad je $704 = 22 \cdot 32$, odkiaľ $a = 21, b = 31$.

Hľadaná dvojica čísel je $(21, 31)$.

Úloha 3.9: V rovnobežníku $ABCD$ pretína os uhla ABC stranu AD v bode P tak, že $|PD| = 35$ a $|BP| = |CP| = 42$. Určte dĺžku strany AB.

Výsledok: 28

Riešenie:



Zo zadania vieme, že BP je os uhla $\sphericalangle ABC$, teda $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle PBC| = \alpha$. Zo zadania ďalej vieme, že $|BP| = |PC|$, teda trojuholník PBC je rovnoramenný a $|\sphericalangle BCP| = |\sphericalangle PBC| = \alpha$.

Ďalej vieme, že $ABCD$ je rovnobežník, teda

$$|\sphericalangle DAB| = 180^\circ \ - |\sphericalangle ABC| = 180^\circ - (|\sphericalangle ABP| + |\sphericalangle PBC|) = 180^\circ - 2\alpha.$$

Tým už máme vyjadrené uhly $\sphericalangle PAB = \sphericalangle DAB$ a $\sphericalangle ABP$ v trojuholníku ABP teda dostávame

$$|\sphericalangle BPA| = 180^\circ - (|\sphericalangle PAB| + |\sphericalangle ABP|) = 180^\circ - (\alpha + 180^\circ - 2\alpha) = \alpha.$$

Mohli sme si tiež všimnúť, že $\sphericalangle BPA$ a $\sphericalangle PBC$ sú striedavé.

Dostali sme, že $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle PBC| = |\sphericalangle BPA| = |\sphericalangle BCP|$, teda podľa vety *uu* sú trojuholníky ABP a BCP podobné. Z toho vyplýva:

$$\begin{aligned} \frac{|BP|}{|AB|} &= \frac{|BC|}{|BP|} \\ 42^2 = |BP|^2 &= |AB| \cdot |BC| \end{aligned} \tag{1}$$

Keďže je $ABCD$ rovnobežník, tak $|BC| = |AD| = |AP| + |PD|$. Trojuholník BPA je rovnoramenný, lebo $|\sphericalangle ABP| = |\sphericalangle BPA|$, teda $|AP| = |AB|$. Dostávame

$$|BC| = |AB| + |PD| = |AB| + 35. \tag{2}$$

Dosadíme (2) do (1) a vyriešime kvadratickú rovnicu:

$$\begin{aligned} |AB| \cdot |BC| = |AB| \cdot (|AB| + 35) &= 42^2 \\ |AB|^2 + 35|AB| - 42^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |AB| = \frac{-35 \pm \sqrt{35^2 - 4 \cdot (-42^2)}}{2} = \frac{-35 \pm \sqrt{1225 + 4 \cdot 1764}}{2} = \\ = \frac{-35 \pm \sqrt{8281}}{2} = \frac{-35 \pm 91}{2} \end{aligned}$$

Kladné riešenie máme iba jedno, a to $|AB| = \frac{56}{2} = 28$.

Úloha 3.10: Máme funkciu f z reálnych čísel do reálnych čísel takú, že pre všetky reálne čísla x okrem 0 a 1 platí:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 24x$$

Aká je hodnota $f(3)$?

Výsledok: 50

Riešenie:

Keďže rovnica platí pre všetky reálne čísla okrem 0 a 1, platí aj pre 3. Preto platí:

$$\begin{aligned} f(3) + f\left(\frac{1}{1-3}\right) &= 24 \cdot 3 \\ f(3) + f\left(-\frac{1}{2}\right) &= 24 \cdot 3 \\ f(3) + f\left(-\frac{1}{2}\right) &= 72 \end{aligned} \tag{1}$$

Potom podobne pre $-\frac{1}{2}$ platí:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\right) = 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

Zároveň platí:

$$\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

Preto platí:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)=24\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$
$$f\left(-\frac{1}{2}\right)+f\left(\frac{2}{3}\right)=-12 \tag{2}$$

Pre $\frac{2}{3}$ platí:

$$f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right)=24\cdot\frac{2}{3}$$

Zároveň platí:

$$\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=3$$

Preto platí:

$$f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(3\right)=24\cdot\frac{2}{3}$$
$$f\left(\frac{2}{3}\right)+f\left(3\right)=16 \tag{3}$$

Uvedomme si, že potom máme 3 lineárne rovnice (1), (2) a (3) o 3 neznámych. Vyjadrime teda $f(3)$. Z (1) vyplýva:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=72-f(3)$$

Z (3) platí:

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=16-f(3)$$

Teda z (2) vyplýva:

$$\begin{aligned}(72-f(3))+(16-f(3))&=-12\\ -2f(3)&=-12-72-16\\ 2f(3)&=12+72+16\\ 2f(3)&=100\\ f(3)&=50\end{aligned}$$

Ľahko vieme overiť, že vyhovujúca funkcia ($f(x)=12\cdot\left(\frac{1}{x-1}+x+\frac{x-1}{x}\right)$, viď iné riešenie) naozaj existuje a je určená jednoznačne, takže hodnota $f(3)$ je naozaj 50.

Iné riešenie:

Platí:

$$f(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=24\cdot x \tag{1}$$

Potom podobne pre $\frac{1}{1-x}$ platí:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}\right)=24\cdot\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

Zároveň platí:

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} = -\frac{1-x}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Preto platí:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 24 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right) \tag{2}$$

Pre $\frac{x-1}{x}$ platí:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f\left(\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}}\right) = 24 \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right)$$

Zároveň platí:

$$\frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-x+1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$$

Preto platí:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = 24 \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right) \tag{3}$$

Uvedomme si, že potom máme pre každé x okrem 0 a 1 tri lineárne rovnice (1), (2) a (3) s troma neznámymi $f(x)$, $f\left(\frac{1}{1-x}\right)$ a $f\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

Vyjadrime teda $f(x)$. Z (1) vyplýva:

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 24 \cdot x - f(x)$$

Z (3) vyplýva:

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right) = 24 \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right) - f(x)$$

Teda z (2) vyplýva:

$$\begin{aligned}
24 \cdot x - f(x) + 24 \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right) - f(x) &= 24 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right) \\
-2f(x) &= 24 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right) - 24 \cdot x - 24 \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right) \\
2f(x) &= -24 \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right) + 24 \cdot x + 24 \cdot \left(\frac{x-1}{x}\right) \\
2f(x) &= 24 \cdot \left(-\frac{1}{1-x} + x + \frac{x-1}{x}\right) \\
f(x) &= 12 \cdot \left(\frac{1}{x-1} + x + \frac{x-1}{x}\right)
\end{aligned}$$

Vieme ľahko overiť, že táto funkcia naozaj vyhovuje podmienkam zo zadania.

Teda $f(3)$ má hodnotu:

$$f(3) = 12 \cdot \left(\frac{1}{3-1} + 3 + \frac{3-1}{3}\right) = 50$$

Úloha 3.11: Pre ktoré kladné celé čísla n menšie ako 100 platí, že $n^2 + n - 9$ je deliteľné 101?

Výsledok: 10 a 90

Riešenie: Najprv skúsme prípad, keď je hodnota výrazu n^2+n-9 rovná 101. To nastane pre $n = 10$, lebo $10^2 + 10 - 9 = 101$. Tento výraz na kladných celých číslach stúpa, keďže k číslu n pripočítavame jeho druhú mocninu (ktoré na kladných celých číslach tiež rastie) a odčítame konštantnú hodnotu.

Pre každé n menšie ako 10 by teda bola hodnota výrazu menšia ako 101. Takýto výraz by už mohol byť deliteľný 101 len vtedy, ak by sa rovnal 0 alebo zápornému násobku 101. Pre $n = 1$ je hodnota výrazu -7, takže k záporným násobkom 101 sa nedostaneme. Ďalej pre $n = 2$ je hodnota výrazu -3 a pre $n = 3$ už je to 3, čiže kladné číslo, takže nedostaneme ani nulovú hodnotu. Ostatné n menšie ako 10 teda nie sú riešeniami.

Možnými riešeniami sú už len čísla n väčšie ako 10. Zaveďme n ako $k + 10$, kde k je kladné celé číslo menšie ako 90. Dosadením do výrazu zo zadania a úpravami dostaneme:

$$(k + 10)^2 + (k + 10) - 9$$
$$k^2 + 20k + 100 + k + 1$$
$$k^2 + 21k + 101$$
$$k(k + 21) + 101$$

V tomto výraze je jedným z členov 101, teda aby bol celý výraz deliteľný 101, potrebujeme, aby aj zvyšok výrazu, teda $k(k + 21)$, bol deliteľný 101. 101 je prvočíslo a nevieme ho rozdeliť na menšie prvočinitele. Máme teda dve možnosti, čo môže byť deliteľné číslom 101, buď k, alebo $k + 21$.

- Samotné k nemôže byť deliteľné 101, keďže uvažujeme len kladné celé čísla menšie ako 90.
- $k + 21$ môže byť deliteľné 101 v danom rozmedzí iba vtedy, ak $k + 21 = 101$, a teda $k = 80$.

Označili sme si n ako $k + 10$ a zistili sme, že ďalším riešením je $k = 80$, a teda $n = 90$. Hľadané čísla sú teda 10 a 90.

Úloha 3.12: Nech $p(n)$ je počet všetkých usporiadaných n-tíc núl a jednotiek takých, že sa v nich nevyskytujú tri po sebe idúce nuly. Určte $p(11)$.

Výsledok: 927

Riešenie:

Uvažujme všetky vyhovujúce usporiadané k-tice pre nejaké celé číslo $k \geq 3$.

Keďže sa v nich nenachádzajú tri po sebe idúce nuly, v prvej trojici (keďže $k \geq 3$ tak existuje) musí byť aspoň jedna 1, a teda existuje prvá jednotka. Pozrime sa na počet takýchto k-tíc podľa polohy prvej 1:

- Prvá 1 sa nachádza na 1. mieste. Teda každá takáto k-tica vyzerá ako $(1, \dots)$.

  Uvedomme si potom, že po prvej 1 nasleduje ľubovoľná usporiadaná $(k-1)$-tica z núl a jednotiek taká, že sa v nich nevyskytujú tri nuly vedľa seba. Počet takýchto $(k-1)$-tíc je $p(k-1)$, a teda aj počet týchto k-tíc je $p(k-1)$.

- Prvá 1 sa nachádza na 2. mieste. Teda každá takáto k-tica vyzerá ako $(0, 1, \dots)$.

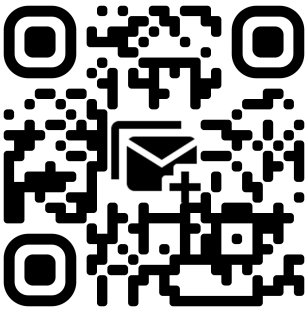
  Analogicky po prvej 1 nasleduje ľubovoľná usporiadaná vyhovujúca $(k-2)$-tica, a teda počet $(k-2)$-tíc, a tým aj takýchto k-tíc, je $p(k-2)$.

- Prvá 1 sa nachádza na 3. mieste. Teda každá takáto k-tica vyzerá ako $(0, 0, 1, \dots)$. Analogicky je počet takýchto k-tíc $p(k-3)$.

Tým sme ukázali, že pre $p(n)$ platí rekurzívne $p(n) = p(n-1) + p(n-2) + p(n-3)$.
Postupne potom vyčíslime $p(11)$:

- $p(0) = 1$, keďže je jedna vyhovujúca 0-tica, a to ().
- $p(1) = 2$, keďže sú dve vyhovujúce 1-tice, a to (0) a (1).
- $p(2) = 4$, keďže sú štyri vyhovujúce 2-tice, a to $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ a $(1, 1)$.
- $p(3) = p(0) + p(1) + p(2) = 1 + 2 + 4 = 7$.
- $p(4) = p(1) + p(2) + p(3) = 2 + 4 + 7 = 13$.
- $p(5) = p(2) + p(3) + p(4) = 4 + 7 + 13 = 24$.
- $p(6) = p(3) + p(4) + p(5) = 7 + 13 + 24 = 44$.
- $p(7) = p(4) + p(5) + p(6) = 13 + 24 + 44 = 81$.
- $p(8) = p(5) + p(6) + p(7) = 24 + 44 + 81 = 149$.
- $p(9) = p(6) + p(7) + p(8) = 44 + 81 + 149 = 274$.
- $p(10) = p(7) + p(8) + p(9) = 81 + 149 + 274 = 504$.
- $p(11) = p(8) + p(9) + p(10) = 149 + 274 + 504 = 927$.





autori:	Martin Dudjak, Bianka Gurská, Miriam Horváthová, Oskar Hritz, Branislav Ječim, Eva Krajčiová, Patrik Paľovčík, Oliver Seman, Martin Šmilňák, Natália Tkáčová, Ľubomír Vargovčík, Štefan Vašak, Richard Vodička
recenzia a úprava:	Michal Iľkovič, Eva Krajčiová, Kalista Semancová
názov:	**Košický Matboj – 23. 10. 2026**
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
web:	`strom.sk/strom/akcie/matboj`