STROM

Zimný semester ***51. ročník (2026/2027)***

STROM je matematická súťaž pre šikovných stredoškolákov a žiakov príslušných ročníkov viacročných gymnázií. Ak sa ti bude dariť, čaká ťa týždňové dobrodružstvo na sústredení – plné zaujímavej matematiky, ktorú v škole len tak nestretneš, ale aj kopec športu, hier a tvorivých aktivít. Pre víťazov máme pripravené aj niečo navyše – knižné poukážky.

Ako na to?

Každý polrok pre teba pripravíme 2 série, každú so 6 úlohami. Svoje riešenia úloh nám potom odovzdáš na našej stránke do zadaného termínu. My ti ich do niekoľkých dní skontrolujeme a obodujeme. Ak budú tvoje riešenia správne a získaš dosť bodov, po skončení 2. série sa môžeš tešiť na pozvánku na sústredenie. Podrobné pravidlá nájdeš na strom.sk/strom/akcie/strom/pravidla/.

Súťažné zadania

1. SÉRIA **TERMÍN: 2.11.2026**

1. ÚLOHA

V trojuholníku ABC os uhla ABC pretína AC v bode D. Rovnobežka s BC vedená bodom D pretína AB v bode E. Platí, že strany AB a BC sú v pomere $2 : 1$. V akom pomere delí E úsečku AB?

2. ÚLOHA

Dokážte, že súčin troch po sebe idúcich kladných celých čísel nemôže byť treťou mocninou kladného celého čísla.

3. ÚLOHA

Obec je súvislý útvar zložený zo štvorcov rovnakej veľkosti, ktoré navzájom susedia hranou. Na obrázku pod úlohou je uvedené, ako by napríklad mohla vyzerať *obec* zložená z ôsmich štvorcov.

Mestom nazveme takú *obec*, ktorá sa skladá z aspoň 2026 štvorcov. *Nedeliteľné mesto* je také, ktoré sa nedá rozdeliť na dve alebo viacero *miest*. Aký je maximálny počet štvorcov, z ktorých sa môže skladať *nedeliteľné mesto*?



4. ÚLOHA

Pre aké najmenšie celé číslo $n > 1$ existuje kladné celé číslo m také, že číslo $m^{1000} + n^{1000} + n$ je deliteľné číslom mn?

5. ÚLOHA

Na tabuli je napísaných n núl v jednom riadku. Hráme hru. V každom ťahu zotrieme jednu z cifier na tabuli a nahradíme ju inou cifrou na tom istom mieste. Dodržiavame pritom tieto obmedzenia:

- Píšeme iba cifry 0, 1 a 2.
- Rozdiel napísanej a zotretej cifry musí byť 1.
- Cifru nemožno zotrieť, ak sa niekde napravo od nej nachádza rovnaká cifra.
- Nemožno napísať takú cifru, ktorá sa už nachádza niekde napravo od práve zotretej cifry.

Určte, na koľko najmenej ťahov môžeme dosiahnuť stav, že na tabuli budú napísané samé jednotky.

6. ÚLOHA

Nájdite všetky funkcie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ také, že pre všetky $a, b \in \mathbb{Z}$ platí:

$$f(a + b) + f(ab - 1) = f(a)f(b) + 2.$$

2. SÉRIA *TERMÍN: 30.11.2026*

1. ÚLOHA

Kopy vybral päť deliteľov čísla 6^{2027}. Dokážte, že Oliver vie z nich vybrať dva, ktorých súčin je druhou mocninou celého čísla.

2. ÚLOHA

Iľo napísal na tabuľu reálne číslo. Potom postupne ku každému číslu x na tabuli napísal čísla $1 - x$ a $\frac{1}{x}$, pokiaľ sú definované a ešte na tabuli neboli napísané. Skončil, keď už nebolo možné napísať žiadne nové číslo. Koľko čísel mohlo byť na konci na tabuli? Určte všetky možnosti.

3. ÚLOHA

V rovine je daných 220 priamok vo všeobecnej polohe (teda takých, že žiadne tri neprechádzajú tým istým bodom a žiadne dve nie sú rovnobežné). Tieto priamky rozdelia rovinu na oblasti. Vzdialenosť medzi dvoma oblasťami definujeme ako najmenší počet priamok, ktorý musíme prekročiť, aby sme sa dostali z jednej oblasti do druhej (cez priesečníky sa nedá prechádzať). Oblasť nazveme *zvedavou*, ak jej vzdialenosť od každej inej oblasti je menšia ako 220. Určte všetky možné počty *zvedavých* oblastí.

4. ÚLOHA

Evka na tabuľu napísala červenou fixkou 100 rôznych kladných celých čísel. Potom pod každé číslo napísala zelenou fixkou to isté číslo, ale zväčšené o najväčšieho spoločného deliteľa zvyšných 99 červených čísel. Určte, koľko najviac rovnakých zelených čísel mohla Evka napísať.

5. ÚLOHA

Dokážte, že ak funkcia $f : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{Z}^+$ spĺňa nasledujúce dve podmienky, potom je f ohraničená zhora, teda existuje číslo, ktoré nepresiahne žiadna hodnota funkcie f.

- Pre ľubovoľné kladné celé číslo n platí, že $f(n)$ delí $n + 2026$.
- Pre ľubovoľné kladné celé čísla $a > b$ platí, že $f(a)$ delí $f(ab)$.

6. ÚLOHA

Nech ABC je trojuholník s $|\angle BAC| = 120°$ a $|\angle ABC| = 40°$. Ďalej I je stred kružnice vpísanej trojuholníku ABC. Priesečník priamok AI a BC označme D a priesečník BI s AC označme E. Bod N je taký, že $|NE| = |ND|$ a $|\angle END| = 120°$, pričom N a A ležia v opačných polrovinách určených priamkou DE. Nech ω je kružnica so stredom N a polomerom $|ND|$. Dotykové body dotyčníc vedených z bodu B na kružnicu ω označme P a Q. Dokážte, že priamky PQ, DE a CI sa pretínajú v jednom bode.

Všetko dôležité nájdeš na strom.sk/strom.

Organizátorom je Združenie STROM a PF UPJŠ v Košiciach.

Združenie STROM
@zdruzeniestrom
@zdruzenie_strom

V prípade otázok nás kontaktuj na strom@strom.sk.