# Úlohy

**Úloha 1:**

Jašter Paťo má telo dĺžky 40 cm, z čoho 10 cm tvorí chvost. Paťo sa ale zľakol, a tak mu odpadol chvost. To ho ešte viac vystrašilo, a tak sa schúlil na polovičnú dĺžku. Akú má teraz Paťo dĺžku?

**Úloha 2:**

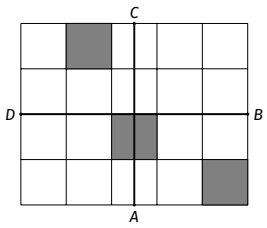
Šesť drevorubačov stojí v rade – Alexander, Dano, Jano, Kim, Lota a Peter. Medzi Danom a Alexandrom sú traja drevorubači, medzi Alexandrom a Janom sú dvaja drevorubači a medzi Janom a Kim jeden drevorubač. Kim nie je ani na jednom kraji tohto radu. Koľko drevorubačov je medzi Lotom a Petrom?

**Úloha 3:**

Kim sa počas prázdnin nudila, tak vzala číslo 20 a začala s ním vykonávať nasledujúcu operáciu: ak je číslo deliteľné 5 bez zvyšku, Kim ho vydelí 5, ak číslo nie je deliteľné 5, Kim k nemu pripočíta 3. Po prvej operácii teda Kim dostala 4, po druhej 7, po tretej 10 atď. Aké číslo dostane Kim po 2026 operáciách?

**Úloha 4:**

V obdĺžniku znázornenom nižšie sú vyfarbené 3 jednotkové štvorce. Body $A, B, C, D$ sú stredmi prislúchajúcich strán obdĺžnika. Dano dofarbil niektoré ďalšie štvorce. Keď prehol obdĺžnik pozdĺž úsečky $AC$, tak všetky vyfarbené oblasti sa prehli na vyfarbené oblasti. Potom rozložil útvar naspäť a prehol útvar pozdĺž úsečky $BD$. Po tomto prehnutí sa vyfarbené oblasti taktiež prehli len na vyfarbené. Aký je najmenší možný počet ďalších jednotkových štvorcov, ktoré Dano dofarbil?




**Úloha 5:**

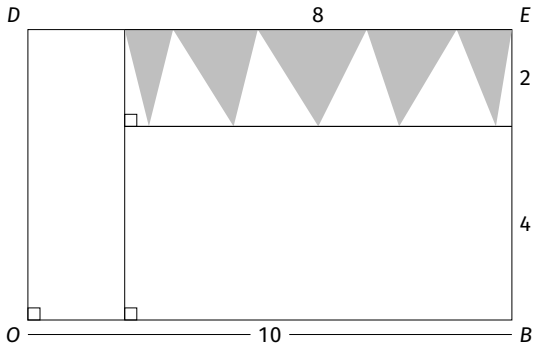
Generál Lota má na tabuli napísané 3 kladné celé čísla. Súčet prvých dvoch je 707 a súčet druhého a tretieho je 700. Určte najmenšiu možnú hodnotu prvého čísla.

**Úloha 6:**

Drevorubač Dano napísal na tabuľu nenulovú cifru. Následne pripísal inú cifru na koniec tak, aby výsledné číslo bolo deliteľné dvomi. Opäť pripísal novú cifru na koniec tak, aby výsledné číslo bolo deliteľné tromi. Takto napísal 9 rôznych cifier, pričom po pripísaní každej cifry na koniec bolo výsledné číslo deliteľné počtom cifier. Akú cifru nenapísal? Nájdite všetky možnosti.

**Úloha 7:**

Tácka drevorubača Dana na obede v jedálni má tvar obdĺžnika. Aká časť obdĺžnika $OBED$ na obrázku je sivá? Odpoveď vyjadrite zlomkom.




**Úloha 8:**

Po strome za sebou lezie 101 lykožrútov očíslovaných odspodu nahor číslami 1 až 101, pričom niektorí z nich vždy hovoria pravdu a ostatní vždy klamú. Prvý, tretí, piaty, ..., 99. a 101. lykožrút, teda každý lykožrút s nepárnym číslom, povie: „Všetci lykožrúti nado mnou klamú“ a druhý, štvrtý, šiesty, ..., 98. a 100. lykožrút, teda každý lykožrút s párnym číslom, povie: „Všetci lykožrúti podo mnou klamú.“ Najviac koľko lykožrútov na strome môže hovoriť pravdu?

**Úloha 9:**

Alexander dlží štyrom ľuďom nejaké sumy peňazí. Všetky tieto sumy sú dvojciferné prvočísla, ktoré spolu obsahujú všetky cifry okrem 0 a 5. Akú sumu dlží Alexander všetkým štyrom dokopy?

**Úloha 10:**

Dano odpisuje vodomer tvaru pravidelného päťuholníka $ABCDE$. Nech $X$ je bod na priamke $AB$ taký, že priamka $XE$ je kolmá na priamku $BE$. Aká je veľkosť uhla $AXE$?

**Úloha 11:**

Starý Jano kráča po dedine a všíma si čísla domov, ktoré sú trojciferné. Pre každé číslo, ktoré si všimol, platí, že jeho cifry sú usporiadané zľava doprava tak, že každá ďalšia cifra je menšia alebo rovnaká ako predchádzajúca. Koľko najviac domov si mohol všimnúť?

**Úloha 12:**

Drevorubač Ambrózy si zamkol náradie do šopky na špeciálny sedemciferný kód nezačínajúci nulou. Chce taký kód, pre ktorý platí, že je zostavený z ľubovoľných cifier, ktoré sa môžu opakovať, a každá okrem prvých dvoch cifier vznikne odčítaním cifry jednu pozíciu pred ňou od cifry dve pozície pred ňou (teda ak sú napríklad prvé dve cifry 9 a 7, tretia cifra je 2 a štvrtá 5). Aké sú všetky možné hodnoty jeho kódu?

**Úloha 13:**

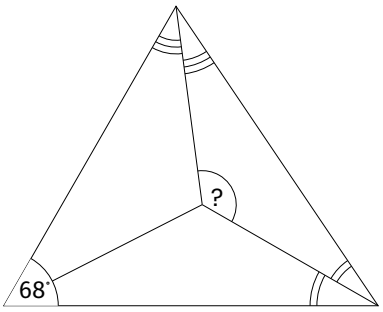
Profesorka McMinarčíková zadáva písomnú prácu dvom triedam. Priemerný výsledok žiakov v dopoludňajšej triede je 84 a priemerný výsledok v popoludňajšej triede je 70. Pomer počtu žiakov v dopoludňajšej triede k počtu žiakov v popoludňajšej triede je $3 : 4$. Aký je priemerný výsledok všetkých žiakov?

**Úloha 14:**

Dano vynáša Starému Janovi sáčky so smetím z veže. Do veže vedie eskalátor, ktorý má 100 metrov a ide vždy nahor rýchlosťou 4 km/h. Dano zároveň kráča rýchlosťou 5 km/h po eskalátore. Koľkokrát spraví Dano kolečko hore-dole za 1 hodinu?

**Úloha 15:**

Cukrovinka z Fiľakova má tvar trojuholníka ako na obrázku. Jeden z jej vnútorných uhlov má veľkosť 68° a dvojice uhlov pri zvyšných dvoch vrcholoch sú rovnaké. Koľko stupňov má uhol označený otáznikom?




**Úloha 16:**

Na drevorubačskej prehliadke rozkázal generál Lota, aby drevorubači pochodovali v radoch po desiatich drevorubačoch. Ukázalo sa však, že v poslednom rade jeden drevorubač chýbal. Generál Lota rozkázal postavenie po deviatich drevorubačoch do každého radu, ale jeden drevorubač v poslednom rade stále chýbal. A tak zmenšoval počet drevorubačov v jednom rade na 8, 7, 6, ... až na 2, ale stále jeden v poslednom rade chýbal. Koľko najmenej drevorubačov mohlo byť na prehliadke?

**Úloha 17:**

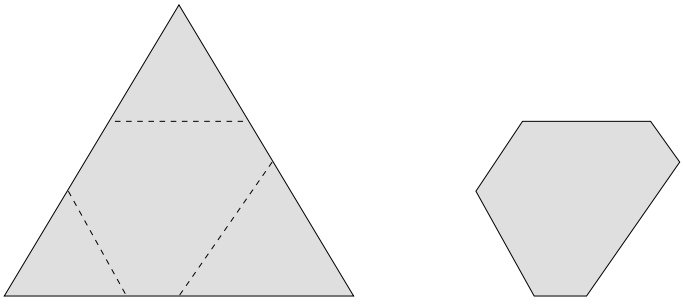
Ľudo vyznačí niekoľko bodov na kružnici a následne ich pospája tak, aby vytvorili mnohouholník, ktorý má všetky vnútorné uhly menšie ako 180°. Zaujíma ho, aký je súčet všetkých vnútorných uhlov tohto útvaru. Pri sčítavaní však prehliadne jeden uhol a dostane tak výsledok 2026°. Aký veľký bol uhol, ktorý prehliadol?

**Úloha 18:**

Štvorciferné číslo nazývame *špičkové* práve vtedy, ak má všetky cifry nenulové a pri ľubovoľnom preusporiadaní jeho cifier sú všetky tieto preusporiadania deliteľné 12. Koľko existuje štvorciferných *špičkových* čísel?

**Úloha 19:**

Dano má kus dreva v tvare rovnostranného trojuholníka so stranou 30. Z každého z troch rohov odrezal rovnostranný trojuholník, ako je znázornené na obrázku. Vzniknutý šesťuholník má obvod 56. Aký je súčet obvodov troch odrezaných trojuholníkov?



**Úloha 20:**

Kim pasie na oplotenej lúke husi, sliepky, ovce a kozy, pričom z každého druhu má aspoň jedno zviera. Okolo ide pocestný a spýtal sa jej, koľko má zvierat. Kim odpovedala: „Husí je dvakrát toľko ako sliepok a kôz je trikrát toľko ako oviec. Spolu majú všetky zvieratá presne 90 nôh.“ Určte počet zvierat každého druhu, ktoré Kim na tejto lúke pasie.

**Úloha 21:**

V 70-dňovom drevorubačskom turnaji hrá nejaký počet hráčov. Každý deň sa odohrá jeden zápas, v ktorom jeden človek prehrá a jeden vyhrá. Človek, ktorý vyhral, bude znova hrať najneskôr o 8 dní, zatiaľ čo človek, ktorý prehral, nebude hrať ďalších najmenej 9 dní. Nájdite najmenší možný počet ľudí, pre ktorý sa takýto turnaj dokáže odohrať.

**Úloha 22:**

Starý Jano hľadá počet všetkých trojciferných čísel $\overline{ABC}$ s rôznymi nenulovými ciframi, pre ktoré platí, že keď od dvojciferného čísla $\overline{AB}$ odčíta $C$, výsledok sa rovná súčtu dvojciferného čísla $\overline{BC}$ a čísla $A$. Zistite tento počet.

*Označenie $\overline{AB}$ označuje dvojciferné číslo, ktorého cifra na mieste desiatok má hodnotu $A$ a cifra na mieste jednotiek má hodnotu $B$.*

**Úloha 23:**

Čepeľ sekery je rovnoramenný trojuholník $ABC$ so základňou $AB$ a obvodom 50. Nech $D$ je stred strany $BC$ a $E$ stred strany $AC$. Obvod trojuholníka $ABE$ je o 8 väčší než obvod trojuholníka $ACD$. Vypočítajte veľkosti strán čepele $ABC$.

**Úloha 24:**

Drevorubač Dano si chce uložiť misky vedľa seba na poličku, prípadne môže menšiu misku vložiť do väčšej. Má 4 misky rôznych veľkostí, koľkými spôsobmi vie tieto 4 misky položiť na poličku?

**Úloha 25:**

Maroš navzájom vynásobil 5 po sebe idúcich párnych kladných celých čísel, ktoré sú aspoň dvojciferné. Aké je najväčšie kladné celé číslo, ktoré určite delí tento súčin?

**Úloha 26:**

Dano sa hrá na šachovnici $8 \times 8$. Zaujíma ho, koľko existuje obdĺžnikov (aj štvorce sú obdĺžniky) zložených len z políčok tejto šachovnice.

**Úloha 27:**

Peter si vybral päť čísel z 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 a povedal svojmu tatkovi ich súčin. Tatko sa snažil zistiť, či je súčet Petrových čísel párny alebo nepárny. Po chvíli usúdil, že sa to zistiť nedá. Aký bol súčin, ktorý Peter povedal tatkovi?

**Úloha 28:**

Nazvime *Gáborovým číslom* také trojciferné číslo, z ktorého keď vyberieme ktorúkoľvek dvojicu číslic v takom poradí, v akom sú tieto číslice v čísle, vytvoria dvojciferné prvočíslo. Napríklad 137 je *Gáborovo číslo*, pretože 13, 17 a 37 sú prvočísla, ale 211 *Gáborovým číslom* nie je, pretože 21 nie je prvočíslo. Aké je najväčšie *Gáborovo číslo*?

**Úloha 29:**

Starý Jano má syna, vnuka a pravnuka. Súčet rokov Jana a pravnuka sa rovná súčtu rokov syna a vnuka. Ak prehodíme číslice vo veku Jana, dostaneme vek syna. Ak prehodíme číslice vo veku vnuka, dostaneme vek pravnuka. Veky všetkých štyroch sú rôzne dvojciferné prvočísla. Akí starí sú?

---

**Úloha 30:**

List tvaru trojuholníka $XYZ$ je rozdelený na štyri oblasti žilkami v tvare priamok rovnobežnými so stranou $YZ$. Tieto priamky rozdeľujú stranu $XY$ na štyri rovnako dlhé úsečky. Ak má druhá najväčšia oblasť obsah 25, aký je obsah trojuholníka $XYZ$?

---

**Úloha 31:**

Drevorubač Dano položil figúrku strelca na štvrté políčko v spodnom riadku na šachovnici 8 × 8. Tento strelec sa hýbe tak, že v jednom ťahu môže ísť len o práve jedno políčko po diagonále. Koľko je spôsobov, ako vie Dano týmto strelcom prekráčať až na najvrchnejší rad, ak sa nikdy nechce vracať dozadu, teda ide len doprava hore a doľava hore?

---

**Úloha 32:**

Gábor si chce oplotiť pozemok tvaru štvorca označeného $ABCD$. Na stranách $AD$ a $CD$ sú postupne stĺpy $E$ a $F$ tak, že $|AE| = 2|ED|$ a $|DF| = 2|FC|$. Dvojice bodov $A, F$ a $E, B$ sú spojené lanami. Priesečník lán označíme $G$. Aký je pomer dĺžok $|EG| : |AG|$?

---

**Úloha 33:**

Do mriežky tvorenej 91 stĺpcami a 141 riadkami vpisujú drevorubač Dano a Peter čísla od 1 do $141 \cdot 91 = 12831$, každý do každého štvorčeka po jednom. Dano píše čísla horizontálne (do riadkov) od 1 postupne zľava doprava, teda do prvého riadku napíše 1 - 91, do druhého 92 - 182 ... Peter píše čísla vertikálne (do stĺpcov) od 1 postupne zhora dole od najľavejšieho stĺpca, teda do prvého stĺpca napíše čísla 1 - 141, do druhého 142 - 282 ... Do koľkých štvorčekov napíšu Peter aj Dano rovnaké číslo?

---

**Úloha 34:**

Kim má niekoľko nerozlíšiteľných čiernych a dvakrát toľko nerozlíšiteľných hnedých topánok. Chce ich zoradiť v skrini tak, aby medzi každými dvoma čiernymi topánkami boli aspoň dve hnedé topánky. Vie, že možných zoradení má viac ako 5000. Koľko najmenej čiernych topánok môže mať?

---

**Úloha 35:**

Vozík s jedlom je tvaru štvorca $ABCD$ a bod $X$ je na polpriamke $BD$ tak, že $|AX| = |BD|$. Aká je veľkosť uhla $DAX$?

---

**Úloha 36:**

Gombitovci sa rozhodli navštíviť drevorubačov v Rouge Forte. Gombitovci sa navzájom zdravia slovom „ahoj“ a zároveň zdravia drevorubačov slovom „ahoj“. Drevorubači sa odzdravia Gombitovcom potľapkaním po pleci a vzájomne medzi sebou sa zdravia tak, že sa dotknú špičkami nosov. Pri spoločnej večeri Gombitovcov a drevorubačov sa každý každému pozdravil správnym spôsobom, pričom bolo počuť pozdrav „ahoj“ 415-krát. Koľko dotykov špičiek nosov sa udialo na večeri, ak Gombitovci boli aspoň dvaja?

**Úloha 37:**

Drevorubač Dano súčasne hodí šiestimi štandardnými šesťstennými kockami a vypočíta súčin šiestich získaných čísel. Aká je pravdepodobnosť, že tento súčin je deliteľný číslom 4?

**Úloha 38:**

Petrovi doletela kačka s poštou zakódovanou nenulovými reálnymi číslami $x, y, z$, pre ktoré platí:

$$\frac{(x+y)}{z} = \frac{(y+z)}{x} = \frac{(z+x)}{y}$$

Nájdite všetky možné hodnoty nasledovného výrazu:

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}$$

**Úloha 39:**

Drevorubači komunikujú špeciálnou abecedou obsahujúcou len písmená $D$, $R$, $E$, $V$, $O$. V ich jazyku je platné každé slovo, ktoré neobsahuje tri po sebe idúce spoluhlásky ani dve po sebe idúce samohlásky. Koľko platných slov skladajúcich sa z práve 7 písmen majú drevorubači vo svojom jazyku?

**Úloha 40:**

V Strede nad Bodrogom majú vodáreň, kde stratili dokument so záznamom o počte vodomerov v meste. Pre ich počet platí, že sa rovná $7^{7^7}$. Aká je posledná číslica ich celkového počtu?

# Hádanky

**Hádanka 1:**

Má to kožu, ale nie je to zviera. Má to listy, ale nie je to strom. Hovorí to k tebe, ale nemá to ústa. Čo to je?

*Toto je bonus, nie klasická úloha. Za jeho vyriešenie dostávate 2 body a neobdržíte novú úlohu.*

**Hádanka 2:**

Meraný tieňmi, meraný pieskami - meranie je jednoduché pre niekoho s tromi rukami. Koho?

*Toto je bonus, nie klasická úloha. Za jeho vyriešenie dostávate 2 body a neobdržíte novú úlohu.*

**Hádanka 3:**

Staviam hrady, búram hory, oslepujem ľudí a pomáham im vidieť. Pretekám cez prsty a mením tvar podľa toho, kde ma uväznia. Čo som?

*Toto je bonus, nie klasická úloha. Za jeho vyriešenie dostávate 2 body a neobdržíte novú úlohu.*

**Hádanka 4:**

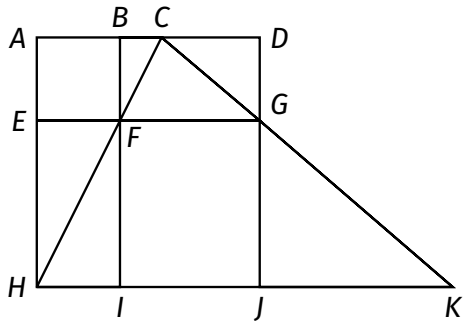
V lese rastie, na brehu sa rodí, vo vode žije, v ohni umiera. Čo to je?

*Toto je bonus, nie klasická úloha. Za jeho vyriešenie dostávate 2 body a neobdržíte novú úlohu.*

# Hlavolamy

**Hlavolam 1:**

Obrázok znázorňuje plán cestnej siete mesta. Toto mesto má 8 rovných ulíc (každá skupina bodov spojená rovnou čiarou) a 11 križovatiek pomenovaných písmenami $A$, $B$, ... , $K$. Policajti musia byť umiestnený na troch križovatkách tak, aby na každej z 8 ulíc bol umiestnený aspoň jeden policajt. Na ktorých troch križovatkách by mali byť policajti umiestnení?




*Toto je bonus, nie klasická úloha. Za jeho vyriešenie dostávate 2 body a neobdržíte novú úlohu.*

**Hlavolam 2:**

Rozdeľte tabuľku na biele ostrovy a jeden súvislý čierny oceán tak, aby každé číslo určovalo presný počet bielych políčok svojho ostrova, pričom na každom ostrove smie byť len jedno číslo, ostrovy sa nesmú dotýkať stranami (môžu sa dotýkať len šikmo, rohom), všetky čierne políčka musia byť prepojené do jedného neprerušeného celku a nikde na mape nesmie vzniknúť čierny štvorec 2 × 2.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 1 | | 1 |
| | | | | |
| | 3 | | | |
| | | | | |
| | | 2 | | 3 |

*Toto je bonus, nie klasická úloha. Za jeho vyriešenie dostávate* 2 *body a neobdržíte novú úlohu.*

---

**Hlavolam 3:**

V tabuľke 7 × 7 sú schované huby. Čísla vpísané do tabuľky hovoria, koľko húb je v danom riadku a stĺpci dokopy. Dve huby nemôžu byť schované na políčkach dotýkajúcich sa stranou a pod číslom nesmie byť schovaná huba. Koľko najviac húb môže byť schovaných v tabuľke?

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 3 |
| | | 5 | | | | |
| | | | | | | |
| | 8 | | | | | |
| | | | | | | |
| | | | | | 1 | |
| | | | | 4 | | |

*Toto je bonus, nie klasická úloha. Za jeho vyriešenie dostávate* 2 *body a neobdržíte novú úlohu.*

**Hlavolam 4:**

Umiestnite do tabuľky 4 × 4 šesť kamienkov tak, aby každý kamienok susedil s párnym počtom kamienkov a každé prázdne políčko s nepárnym počtom kamienkov.

*Toto je bonus, nie klasická úloha. Za jeho vyriešenie dostávate 2 body a neobdržíte novú úlohu.*