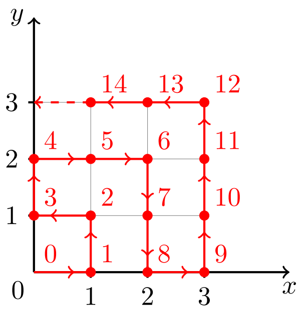
Košický matboj, 27. 10. 2017, 1. časť

1.1. Kubo má 26 kamarátov, ktorí riešili seminár STROM, a 17 takých, ktorí riešili seminár KMS. 11 jeho kamarátov nikdy žiadny seminár neriešilo. Ak má Kubo 42 kamarátov, koľko z nich riešilo STROM aj KMS?

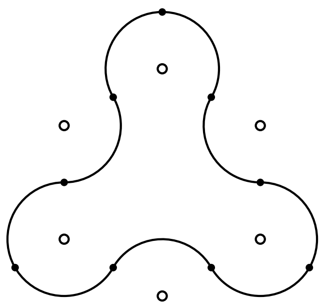
1.2. Nájdite všetky usporiadané dvojice prvočísel (p, q) také, že spĺňajú $p^q + pq = 323$.

1.3. V miestnosti je 7 ľudí. Štyria z nich poznajú práve jedného iného človeka v miestnosti a traja z nich poznajú práve dvoch. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne zvolení dvaja ľudia sa nepoznajú? Výsledok zadajte ako zlomok v základnom tvare. Poznámka: známosť je vzájomná.

1.4. Častica sa pohybuje v súradnicovom systéme, ako je znázornené na obrázku. Za minútu prejde vždy vzdialenosť dĺžky 1. V ktorom bode sa bude nachádzať po 2017 minútach?



1.5. The closed curve in the figure is made of 9 congruent circular arcs each of length $2\pi/3$, where each of the centers of the corresponding circles is among the vertices of a regular hexagon of side 2. What is the area enclosed by the curve?



1.6. Majme jedenásťboký ihlan, ktorý má na každej stene (aj podstave) nejaké číslo. Súčet všetkých týchto čísel je 60. Každému vrcholu je priradené číslo, ktoré je rovné súčtu čísel na stenách, ktoré tento vrchol obsahujú. Navyše majú všetky vrcholy priradené rovnaké číslo. Aké?

1.7. Majme pevnú šachovnicu rozmerov 3×3. Koľko trojuholníkov určujú jej mrežové body? Výsledok uveďte ako jedno prirodzené číslo.

1.8. Majme škatuľu so 100 čiernymi a 100 bielymi guľôčkami. Vždy z nej vyberieme 3 guľôčky a niektoré vrátime podľa nasledujúcich pravidiel (zvyšné vybrané guľôčky do škatule nevraciame):

1. Ak vytiahneme 3 čierne, vrátime 2 čierne.
2. Ak vytiahneme 2 čierne a 1 bielu, vrátime 1 čiernu a 1 bielu.
3. Ak vytiahneme 1 čiernu a 2 biele, vrátime 2 biele.
4. Ak vytiahneme 3 biele, vrátime 1 čiernu a 1 bielu.

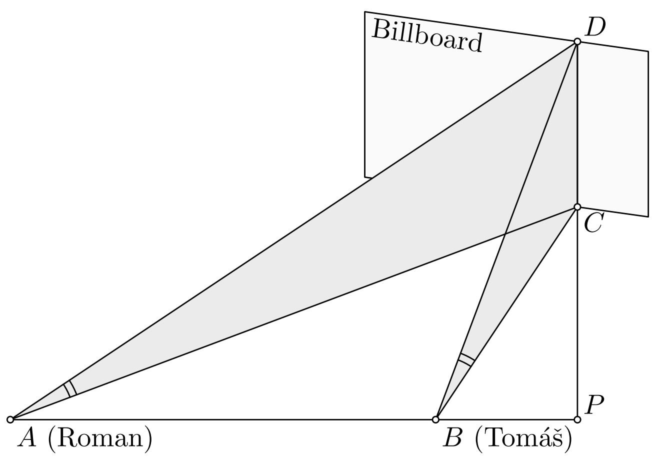
Aké guľôčky môžeme mať na konci?

1.9. Je daný štvoruholník $ABCD$ taký, že jeho uhlopriečky sú osami jeho vnútorných uhlov. Určte jeho obsah, ak viete, že jedna strana a jedna z jeho uhlopriečok majú zhodnú dĺžku 2.

1.10. Nech $f(n) = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ pre $n \in \mathbb{N}$. Zistite hodnotu súčtu: $f(1) + f(2) + \cdots + f(2017)$.

1.11. Máme 5 letísk. Pre každé dve letiská A, B platí, že buď existuje pravidelné letecké spojenie z A do B alebo z B do A, nie však obidve zároveň. Navyše ešte platí, že existuje jedno letisko, z ktorého sa dá vyraziť a po čase sa doňho nejako vrátiť späť. Koľko je možností, ako môžu byť pravidelné linky medzi letiskami rozvrhnuté?

1.12. Roman a Tomáš sa pozerajú na billboard. Roman stojí na bode A vo vzdialenosti 40 m od steny, na ktorej sa billboard nachádza, zatiaľ čo Tomáš stojí na bode B vo vzdialenosti 10 m od steny. Z oboch bodov vidno billboard pod rovnakým uhlom; uhol CAD je rovnaký ako uhol CBD, kde C je bod na spodnom okraji billboardu a D je bod na vrchnom okraji billboardu a navyše body A, B, C a D ležia v rovine kolmej na zem. Zistite, v akej výške je zavesený billboard (vzdialenosť bodov P a C), ak výška billboardu je 5 m.



Košický matboj, 27. 10. 2017, 2. časť

2.1. Pokladníčka v múzeu predáva ľuďom vstupenky s číslom podľa toho, koľkí v poradí v ten deň prišli (prvý návštevník dostane vstupenku s číslom 1, druhý s číslom 2, atď.). Počas dňa sa minul žltý papier, na ktorý vstupenky tlačila, a preto začala používať modrý. Večer zistila, že predala rovnako veľa žltých vstupeniek ako modrých, no súčet čísel na modrých vstupenkách bol o 49 väčší. Koľko vstupeniek v ten deň predala?

2.2. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n, pre ktoré je každá číslica čísla $12n$ 0 alebo 7.

2.3. Nájdite štvorciferné číslo, ktorého všetky cifry sú navzájom rôzne a keď toto číslo trikrát vydelíme jeho ciferným súčtom, dostaneme opäť jeho ciferný súčet.

2.4. V senáte zasadá 100 senátorov, po dvoch z každého z päťdesiatich republikových štátov. Koľkými spôsobmi vieme vybrať štvorčlenný výbor tak, aby v ňom neboli dvaja senátori z rovnakého štátu?

2.5. Annie stands at one vertex of a regular hexagon. Every second, she moves independently to one of the two vertices adjacent to her, each with equal probability. Determine the probability that she is at her starting position after ten seconds.

2.6. Štvorsten má päť hrán dĺžky 2 a jednu hranu dĺžky 3. Vypočítajte jeho objem.

2.7. Tri reálne čísla x, y, z spĺňajú rovnicu $|x+2|+|y+4|+|z-5|=1$. Napíšte najväčšiu možnú hodnotu, akú môže mať súčet $x+y+z$.

2.8. Nájdite všetky dvojice prirodzených čísel m, n, pre ktoré platí $mn^2 = 100(n+1)$.

2.9. Nájdite čo najdlhší úsek aritmetickej postupnosti prirodzených čísel s diferenciou 60, ktorý je tvorený len prvočíslami.

2.10. Daný je obdĺžnik $ABCD$ a bod P. Vzdialenosť bodu P od bodov A, B, C je postupne 16, 9, 15. Aká je vzdialenosť bodov P a D?

2.11. Nech: $x \circ y = \frac{xy}{x+y}$. Nájdite hodnotu výrazu: $2^1 \circ \left(2^2 \circ \left(2^3 \circ \cdots \circ \left(2^{2016} \circ 2^{2017}\right)\right)\right)$.

2.12. Štvoruholník $ABCD$ je vpísaný do polkružnice s priemerom AD. Ak $|AD| = 4$ a $|AB| = |BC| = 1$, akú dĺžku má strana CD?

Košický matboj, 27. 10. 2017, 3. časť

3.1. Výletná spoločnosť vlastní 3 lode. Prvá z nich chodí na výlety trvajúce 6 dní, druhá na 8 dní a tretia na 15 dní. Na začiatku leta vyrazili z prístavu všetky 3 lode naraz. Po koľkých dňoch sa opäť stretnú v prístave všetky?

3.2. Nájdite všetky prvočísla p, pre ktoré platí, že $29p + 1$ je druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla.

3.3. Peťo a Matúš hrajú nasledujúcu hru. Matúš rozseká štvorec 9×9 na niekoľko obdĺžnikov s jednou stranou dĺžky 1, pričom seká len po stranách štvorčekov. Následne Peťo zvolí prirodzené číslo k a Matúš zaplatí Peťovi toľko centov, koľko je celková plocha všetkých obdĺžnikov $1 \times k$ a $k \times 1$. Peťo chce vždy získať čo najviac centov a Matúš mu chce zaplatiť čo najmenej. Zistite koľko najmenej centov môže Matúš zaplatiť Peťovi bez ohľadu na to, ako Peťo volí k.

3.4. Nájdite všetky riešenia rovnice $x^y + 1 = z$ také, že x, y a z sú prvočísla.

3.5. Find the number of positive integers with three not necessarily distinct digits, $\overline{abc}$, with $a \neq 0$, $c \neq 0$ such that both $\overline{abc}$ and $\overline{cba}$ are divisible by 4.

3.6. Máme v rovine trojuholník ABC s obsahom S. Jeho otočením okolo ťažiska o 180 stupňov dostaneme trojuholník $A'B'C'$. Určte obsah útvaru, ktorý je prienikom trojuholníkov ABC a $A'B'C'$.

3.7. Nech n je kladné celé číslo. Riadok s $n + 1$ štvorcami očíslujeme zľava doprava číslami $0, 1, 2, \ldots, n$. Dorka a Katka na ňom hrajú hru. Obe začínajú na políčku 0. Každú sekundu spravia pohyb doprava podľa nasledujúcich pravidiel: Ak je aspoň 8 štvorcov napravo od Dorkinej figúrky, potom Dorka skočí o 8 políčok doprava. Ináč sa posunie Dorka len o jedno políčko doprava. Ak je aspoň 7 štvorcov napravo od Katkinej figúrky, potom Katka skočí o 7 políčok doprava. Ináč sa Katka posunie len o jedno políčko doprava. Označme $D(n)$ a $K(n)$ počet sekúnd u Dorky, respektíve Katky, za ktoré sa dostanú na políčko n. Napríklad $D(40) = 5$ a $K(40) = 10$. Určte najväčšie n, pre ktoré je $K(n) < D(n)$.

3.8. Pri práci ste dostali nasledujúcu postupnosť bodiek a čiarok dĺžky $4n$ pripomínajúcich morseovku bez oddeľovačov. $- - \cdot \cdot - - \cdot \cdot \ldots - - \cdot \cdot$ (znakov je $4n$). Koľkými spôsobmi sa dajú do postupnosti doplniť oddeľovače tak, aby vzniknuté písmená boli len písmená zo slova MATEMATIKA?

A	$\cdot -$	I	$\cdot \cdot$	R	$\cdot - \cdot$
B	$- \cdot \cdot \cdot$	J	$\cdot - - -$	S	$\cdot \cdot \cdot$
C	$- \cdot - \cdot$	K	$- \cdot -$	T	$-$
D	$- \cdot \cdot$	L	$\cdot - \cdot \cdot$	U	$\cdot \cdot -$
E	$\cdot$	M	$- -$	V	$\cdot \cdot \cdot -$
F	$\cdot \cdot - \cdot$	N	$- \cdot$	W	$\cdot - -$
G	$- - \cdot$	O	$- - -$	X	$- \cdot \cdot -$
H	$\cdot \cdot \cdot \cdot$	P	$\cdot - - \cdot$	Y	$- \cdot - -$
CH	$- - - -$	Q	$- - \cdot -$	Z	$- - \cdot \cdot$

3.9. Nech $S \subseteq \{1, 2, \ldots, 2017\}$. Navyše platí, že ak $a, b \in S$, tak $a - b$ nedelí $a + b$. Koľko najviac prvkov môže mať množina S?

3.10. Na kružnici leží n bodov. Vyberieme náhodne tri z nich a označíme ich A, B, C. Označíme ešte ďalšie tri zo zvyšných $n - 3$ bodov X, Y, Z (tiež náhodne). Aká je pravdepodobnosť, že sa trojuholníky ABC a XYZ pretínajú?

3.11. Body M a N sú postupne na stranách BC a CD štvorca $ABCD$ tak, že uhly BMA a NMC majú veľkosť $60°$. Nájdite veľkosť uhla MAN.

3.12. Nájdite všetky reálne čísla a, pre ktoré má rovnica $x^3 - x^2(a + 1) - 2x(a + 2) + a^2 + 2a + 9 = 0$ tri reálne riešenia, z ktorých dve sú menšie ako 2 a jedno je väčšie ako 2.