Košický matboj, 26. 10. 2018, 1. časť

1.1. Troch členov rady Združenia STROM čaká hlasovanie o prijatí nového člena. Podľa stanov sa hlasuje najprv o tom, kto bude kandidát na prijatie (Žanetka alebo Kristín), a až v druhom kole sa hlasuje, či sa rada rozšíri alebo nie. Preferencie jednotlivých členov rady sú takéto:

- Janka: Kristín > nikto > Žanetka
- Robo: nikto > Kristín > Žanetka
- Tomáš: Žanetka > Kristín > nikto

Ako dopadne hlasovanie, ak sa všetci členovia rady chovajú racionálne a nikto nepozná preferencie ostatných?

1.2. Koľko je trojuholníkov s celočíselnými dĺžkami strán a obvodom 28, keď zhodné trojuholníky zaratávame iba raz?

1.3. Nech x, y sú reálne čísla spĺňajúce nasledovnú nerovnicu:

$$2 < \frac{x-y}{x+y} < 5.$$

Vypočítajte hodnotu $k = x/y$ ak viete, že k je celé číslo.

1.4. Papier v tvare kruhu s polomerom 6 rozrežeme na šesť rovnakých kruhových výsekov. Z každého kruhového výseku vytvoríme plášť kužeľa bez podstavy. Aká je výška každého z kužeľov?

1.5. Nech M je taká množina kladných celých čísel, že:

- Okrem iných čísel, M obsahuje aj číslo 2018.
- Aritmetický priemer čísel v množine M je 2010.
- Ak z množiny M odstránime číslo 2018, aritmetický priemer čísel v M sa zníži na 2009.

Aké najväčšie číslo môže množina M obsahovať?

1.6. Nájdite všetky celé čísla x, pre ktoré $x-3$ delí x^2-3 (deliteľnosť myslíme celočíselnú, čiže napr. -2 delí 4). Ako odpoveď zadajte súčet všetkých možných x.

1.7. Máme nekonečnú postupnosť $a_1, a_2, \ldots$ kladných celých čísel. Platí, že $a_1 + a_2 = 28$, $a_3 + a_4 = -11$ a vo všeobecnosti pre všetky kladné celé čísla n platí, že $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$. Zistite súčet $a_{12} + a_{123} + a_{1234}$.

1.8. Nech a, b, c sú kladné celé čísla také, že $3a = c^3$ a $5a = b^2$ a zároveň neexistuje šiesta mocnina prvočísla, ktorá by delila a. Nájdite najväčšiu možnú hodnotu a.

1.9. Nájdite všetky usporiadané trojice reálnych čísel (a, b, c), kde $a \leq b \leq c$, ktoré spĺňajú:

$$ab + c = 6, \qquad bc + a = 6, \qquad ca + b = 6.$$

1.10. Majme trojuholník ABC s vnútornými uhlami pri vrcholoch A, B, C postupne $50°$, $60°$, $70°$. V tomto trojuholníku zostrojíme bod I ako stred vpísanej kružnice a spustíme z neho kolmice na všetky strany trojuholníka. Päty týchto kolmíc označme A_1, B_1 a C_1 (bod A_1 sa nachádza oproti bodu A, bod B_1 oproti B a C_1 oproti C). Potom z I spustíme kolmice na strany trojuholníka $A_1B_1C_1$ a ich päty vytvoria trojuholník $A_2B_2C_2$ (nový bod vždy vznikne na strane oproti pôvodnému). Takto budeme postupovať stále dookola. Aké sú vnútorné uhly v trojuholníku $A_{17}B_{17}C_{17}$?

1.11. Nájdite všetky kladné celé čísla n také, že $n(n+16)$ je druhou mocninou celého čísla.

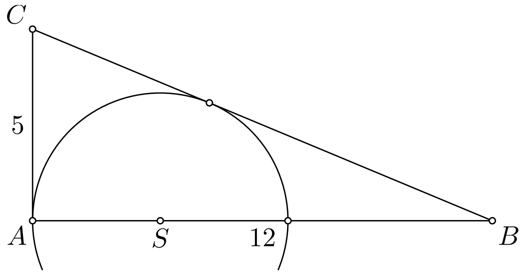
1.12. Koľko reálnych riešení má rovnica $x^2 + 10000\lfloor x \rfloor = 10000x$? Číslo $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť reálneho čísla x, čo je najväčšie celé číslo také, ktoré je menšie alebo rovné číslu x.

Košický matboj, 26. 10. 2018, 2. časť

2.1. Nahraďte písmená číslicami tak, aby platilo $\overline{MM5}/\overline{N5} = 5$. Ako odpoveď zadajte číslo $10N + M$.

2.2. Zo skupiny šiestich účastníkov – Adam, Braňo, Cyril, Dano, Eva, Freďo – je potrebné vytvoriť súťažný tím s dvoma až šiestimi členmi. Adam môže ísť iba ak pôjde Braňo. Ak pôjde Cyril, tak nepôjde Dano, ani Eva. Ak pôjde Freďo, Adam nepôjde. Koľkými spôsobmi sa dá zostaviť tím tak, aby boli splnené všetky podmienky?

2.3. Majme pravouhlý trojuholník ABC s odvesnami AB a AC s veľkosťami postupne 12 a 5. Na strane AB zvolíme bod S tak, že kružnica k so stredom S, prechádzajúca bodom A, sa dotýka strany BC tak, ako je to znázornené na obrázku. Aká je veľkosť polomeru kružnice k?



2.4. Nájdite všetky prvočísla, ktoré môžeme vyjadriť ako súčet a zároveň aj rozdiel dvoch iných prvočísel.

2.5. Taxikár sa pohybuje po hranách štvorčekovej siete. Začína v bode $[0, 0]$ a ide do bodu $[6, 3]$. V bodoch $[4, 1]$ a $[3, 2]$ sú dopravné kontroly. Aká je pravdepodobnosť, že sa kontrolám vyhne, ak v každom kroku z križovatky $[a, b]$, kde $a < 6$ a $b < 3$ s pravdepodobnosťou 1/2 zamieri na križovatku $[a+1, b]$ a s pravdepodobnosťou 1/2 na križovatku $[a, b+1]$ a z ostatných križovatiek mieri priamo ku križovatke $[6, 3]$? Výsledok napíšte ako zlomok v základnom tvare.

2.6. Majme postupnosť kruhov s obsahmi $S_1, S_2, \ldots, S_{2018}$. Súčet obsahov všetkých týchto kruhov je 2019π a pre jednotlivé obsahy platí vzťah $S_{n+1} = S_1 + S_n$. Zistite polomer kruhu s obsahom S_{1009}.

2.7. Koľko existuje usporiadaných štvoríc (k, l, m, n) kladných celých čísel takých, že $k + l + m + n = 31$?

2.8. Zistite, aký zvyšok dáva číslo 5^{20} po delení 26.

2.9. Aká je hodnota výrazu:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+2\sqrt{1+\ldots}}}}}?$$

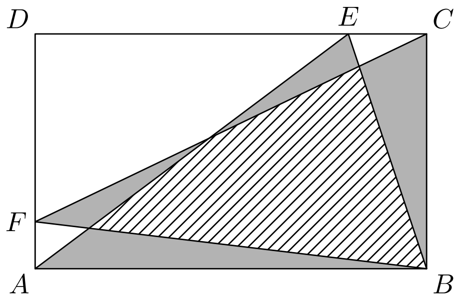
2.10. Majme štvorec $ABCD$ a k nemu pripísaný pravouhlý trojuholník ADE, pričom strana AD je prepona a bod E leží mimo štvorca $ABCD$. Vieme, že $|AE| = 6$, $|ED| = 8$. Aká je dĺžka úsečky EB?

2.11. Majme postupnosť danú vzťahmi: $a_1 = 1$, $a_{2n} = a_n$, $a_{3n} = a_n + 1$, $a_{4n} = a_{3n+1} + a_n - 1$. Určte $a_{999999999}$ (index je zložený z deviatich cifier 9).

2.12. Koľko existuje ciest v štvorčekovej sieti z bodu $[0, 0]$ do bodu $[20, 20]$, ak sa môžeme hýbať len po hranách štvorčekov doprava a hore a nemôžeme sa dostať nad uhlopriečku spájajúcu body $[0, 0]$ a $[20, 20]$?

Košický matboj, 26. 10. 2018, 3. časť

3.1. Na obrázku je znázornený obdĺžnik $ABCD$ s obsahom 1 a body E, F postupne na stranách CD, AD také, že obsah vyšrafovanej časti je 0,42. Aký obsah má sivá časť?



3.2. Nájdite všetky také prirodzené dvojciferné čísla, pre ktoré platí, že sú rovné súčtu svojej číslice na mieste desiatok a druhej mocniny svojej číslice na mieste jednotiek.

3.3. Platí, že každé z čísel a, b, c je náhodne vybrané z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Aká je pravdepodobnosť, že číslo $ab + c$ je nepárne? Výsledok zadajte ako zlomok v základnom tvare.

3.4. Nech a je celé číslo a p je prvočíslo také, že je splnená rovnosť $p + 400 = a^2$. Aký je súčet všetkých možných hodnôt, ktoré môže prvočíslo p nadobúdať?

3.5. Majme čierny rovnostranný trojuholník. V jednom kroku rozdelíme všetky trojuholníky na 4 zhodné rovnostranné trojuholníky a prefarbíme stredný trojuholník – ak bol ten pôvodný čierny, tak stred bude biely a naopak. Aký bude počet bielych trojuholníkov po šiestom kroku?

3.6. Aké je najväčšie prirodzené číslo, ktoré sa nedá zapísať v tvare $42a+b$, kde a, b sú kladné celé čísla a navyše b je zložené číslo? (Číslo nazývame zloženým, ak sa dá zapísať ako súčin dvoch prirodzených čísel väčších ako 1.)

3.7. Nájdite všetky reálne čísla a také, že rovnica

$$a = |x - |x - |x - 4|||$$

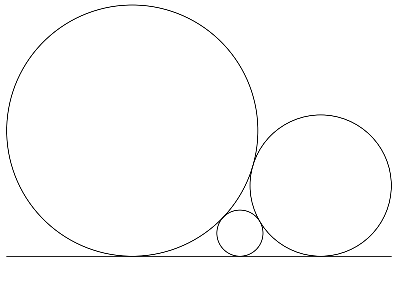
má práve tri riešenia pre reálnu neznámu x.

3.8. Nájdite všetky usporiadané dvojice kladných celých čísel (a, b) také, že $a! + 4! = b^2$.

3.9. Koľkými spôsobmi vieme vyplatiť sumu 2018 eur, ak máme k dispozícii neobmedzený počet 10, 5 eurových bankoviek a 1 eurových mincí?

3.10. Nájdite všetky dvojice kladných celých čísel (a, b), pre ktoré platí $a \leq b$ a $a^2 + b^2 = 2018$.

3.11. Máme tri kružnice rôznych veľkostí, ktoré sa po dvojiciach dotýkajú a majú spoločnú dotyčnicu, ako je to znázornené na obrázku. Polomer najväčšej z nich je 16 a polomer strednej je 9. Aký polomer má najmenšia kružnica?



3.12. Nech korene polynómu $P(x) = x^3 + 3x^2 + 4x - 11$ sú reálne čísla a, b, c a korene polynómu $x^3 + rx^2 + sx + t$ sú $a + b$, $b + c$, $c + a$. Nájdite hodnotu t.