

Košický matboj, 25. 10. 2019, 1. časť

1.1. Nájdite najmenšie kladné celé číslo, pre ktoré platí, že keď pred neho pridáme cifru 6, dostaneme jeho 25-násobok.

1.2. Mihál sčítal aspoň dve za sebou idúce kladné celé čísla a dostal výsledok 1000. Aké najväčšie číslo medzi nimi mohlo byť?

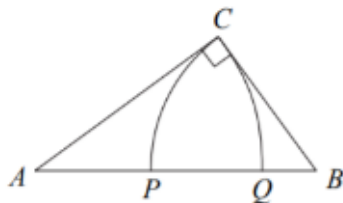
1.3. Koľko najviac kladných celých čísel môžeme sčítat tak, že ich súčet je 2019, ale pri ich sčítavaní nedochádza k žiadnemu prechodu cez desiatku?

1.4. Na sústrezení bolo menej ako 90 účastníkov, ktorých chceli vedúci rozdeliť do družiniek po 2, 3, 5 alebo 7 účastníkoch. V niektorých troch prípadoch im jeden účastník zvýšil a v tom štvrtom im to vyšlo presne. Koľko bolo účastníkov?

1.5. Majme štvorec $ABCD$ so stranou dĺžky 10. Rovnoramenný trojuholník XAB má základňu AB a obsah spoločnej časti štvorca a trojuholníka je 80. Nájdite dĺžku výšky na stranu AB v trojuholníku XAB .

1.6. Vodka si vybral päť čísel z množiny $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ a povedal Matúšovi ich súčin. Matúš sa snažil zistiť, či je súčet Vodkových čísel párny alebo nepárny. Po chvíli usúdil, že sa to zistiť nedá. Aký bol súčin, ktorý Vodka povedal Matúšovi?

1.7. V trojuholníku ABC je pravý uhol pri vrchole C . Kružnica so stredom v bode A a polomerom AC pretne stranu AB v bode Q . Analogicky, kružnica so stredom v bode B a polomerom BC pretne AB v bode P (viď obrázok). Aká je dĺžka PQ , ak vieme, že $|AP| = 16$ a $|BQ| = 8$.



1.8. V klobúku je 8 čiernych a 4 biele zajace. Ak náhodne vytiahneme 6 zajacov, aká je pravdepodobnosť, že posledný vytiahnutý zajac bude čierny?

1.9. Funkcia f je definovaná nasledovne: $f(0,0) = 0$ a pre nezáporné celé čísla n, m platí: $f(n+1, m) = f(n, m) + n$, $f(n, m+1) = f(n, m) - m$. Pre koľko rôznych dvojíc čísel n, m platí $f(n, m) = 2019$?

1.10. Martin sa hral so štyrmi kladnými celými číslami a, b, c, d a všimol si, že platia rovnosti:

$$\begin{aligned}ab + a + b &= 27, \\bc + b + c &= 146, \\cd + c + d &= 104.\end{aligned}$$

Nájdite súčet čísel $a + b + c + d$.

1.11. V konvexnom štvoruholníku $KLMN$ platí, že strana MN je kolmá na uhlopriečku KM , strana KL je kolmá na uhlopriečku LN , $|MN| = 65$ a $|KL| = 28$. Priamka prechádzajúca bodom L , ktorá je kolmá na stranu KN , pretína uhlopriečku KM v bode O , pričom $|KO| = 8$. Určte dĺžku MO .

1.12. Nájdite najväčšie prvočíslo p , ktoré delí $2^{p+1} + 3^{p+1} + 5^{p+1} + 7^{p+1}$.

Košický matboj, 25. 10. 2019, 2. časť

- 2.1.** Nájdite čo najväčšie číslo také, že všetky jeho cifry sú rôzne a číslo je deliteľné 8.
- 2.2.** Matúš dostal na skúške z Algebry desať otázok, na ktoré vedel odpovedať len „ÁNO“ alebo „NIE“. Test je pripravený natolko prefikane, že ak Matúš odpovie na ľubovoľných päť otázok „ÁNO“ a na zvyšných päť otázok „NIE“, bude mať vždy aspoň štyri správne odpovede. Zistite, koľkými spôsobmi je možné takýto test vytvoriť.
- 2.3.** Koľko najviac rôznych prirodzených čísel môžeme sčítať tak, že ich súčet je 2019, ale pri ich sčítavaní nedochádza k žiadnemu prechodu cez desiatku?
- 2.4.** Telesová uhlopriečka kvádra so štvorcovou podstavou zvierá s podstavou uhol 60° . Hrana podstavy má dĺžku 10. Vypočítajte objem telesa.
- 2.5.** Koľko existuje dvojíc uhlopriečok v konvexnom 16-uholníku takých, že majú práve jeden spoločný bod vo vnútri daného 16-uholníka? (Pozn. Body na obvodě mnohoúhelníka nie sú jeho vnútornými bodmi a uhlopriečka je úsečka spájajúca dva rôzne nesusediace vrcholy.)
- 2.6.** Do trojuholníka ABC , kde $|AC| = 60$ a $|BC| = 90$ je vpísaný kosoštvorec $CDEF$ tak, že bod D leží na strane BC , bod E na strane AB a bod F na strane AC . Vypočítajte dĺžku strany kosoštvorca.
- 2.7.** Duch žije vo vile s 27 izbami, ktoré sú usporiadané v tvare kocky $3 \times 3 \times 3$. Pohybovať sa vie medzi ktorýmkoľvek izbami, ktoré susedia stenou. Chce sa dostať z izby v jednom z rohov do izby, ktorá je od tejto najďalej (v opačnom rohu), pričom chce prejsť najmenším možným počtom izieb. Bohužiaľ, v izbe, ktorá je v strede domu, je pasca, ktorej sa chce za každých okolností vyhnúť. Koľkými rôznymi cestami vie ísť?
- 2.8.** Na hodinovom ciferníku spojte priamkami body, ktoré sú označené číslami 1, 5, 8. Aké sú vnútorné uhly takto vzniknutého trojuholníka?
- 2.9.** Janka si pre každú dvojicu celých čísel a a b , pre ktoré platí $1 \leq a < b \leq 20$, napísala na kartičku číslo $(b - a)$. Potom si spočítala \mathcal{P} ako súčin všetkých týchto čísel na kartičkách. Nájdite najväčšie kladné celé číslo n také, že 2^n delí \mathcal{P} .
Najvyššia mocnina dvojky, ktorá delí súčin čísel na všetkých kartičkách, je teda 2^{150} .
- 2.10.** Pre funkciu f a všetky celé čísla $n > 2$ platí $f(1) = f(2) = 1$ a $f(n) = f(n - 1) - f(n - 2) + n$. Aká je hodnota $f(2019)$?
- 2.11.** Majme n jednotiek v rade. Keď medzi ne doplníme ľubovoľne veľa znamienok $+$, dostaneme výraz. Pre koľko rôznych hodnôt n môže tento výraz nadobúdať hodnotu 1111?
- 2.12.** Hovoríme, že kladné celé číslo m obsahuje nezáporné celé číslo n , ak niekoľko po sebe idúcich cifier čísla m tvorí číslo n . Napríklad číslo 2019 obsahuje čísla 2, 0, 1, 9, 20, 19, 201, 2019. Nájdite najväčšie kladné celé číslo, ktoré neobsahuje žiadny násobok 7.

Košický matboj, 25. 10. 2019, 3. časť

3.1. Najmenej koľko cifier musíme vyškrtnúť z čísla 25102019 tak, aby výsledné číslo bolo deliteľné 3, 5 aj 8?

3.2. Vieme, že predseda STROMu je niekto z trojice Matúš, Kristín, Janka. Zo zvyšných dvoch ľudí jeden vždy klame a druhý vždy hovorí pravdu. Navzájom o sebe povedali:

- Matúš: Predseda je žena.
- Kristín: Matúš klame.
- Janka: Nie som predseda.

Zistite, kto z nich je predseda, a či hovorí pravdu alebo klame.

3.3. Koľko je dvojíc kladných celých čísel takých, že ich súčet je 2019, ale pri ich sčítavaní nedochádzalo k žiadnemu prechodu cez desiatku?

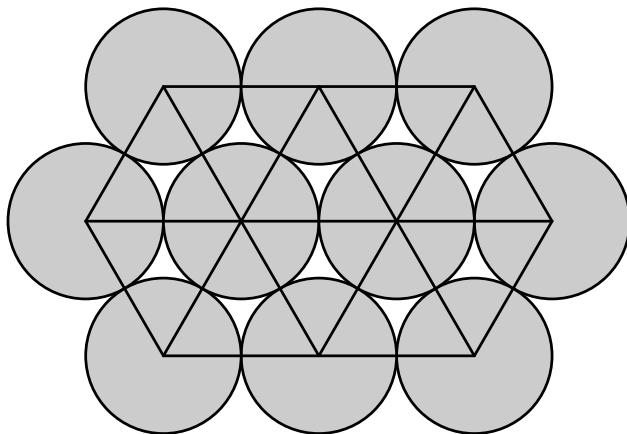
3.4. Pravouhlý trojuholník KLM má dĺžky odvesien $|KM| = 16$ a $|LM| = 12$. Vypočítajte vzdialenosť bodu M od stredu O prepony KL .

3.5. Matematickej súťaže sa zúčastnili súťažiaci z troch rôznych krajín. Na začiatku súťaže si každý podal ruku so všetkými jeho krajanmi (z každej krajiny prišli aspoň dvaja súťažiaci). Koľko ľudí sa zúčastnilo súťaže, ak vieme, že dokopy prebehlo 42 podaní rúk a zo žiadnych dvoch krajín neprišiel rovnaký počet účastníkov?

3.6. Nájdite všetky kladné celé čísla n , pre ktoré platí, že $6 + n$ delí $6n$.

3.7. Rovnoramennému trojuholníku, ktorého ramená zvierajú uhol 45 stupňov, sme opísali kružnicu s polomerom $\sqrt{32}$. Aký je obsah tohto trojuholníka?

3.8. Parašutista zoskočil nad ovocným sadom. Stromy sú vysadené vo vrcholoch nekonečne veľkej siete zloženej z rovnostranných trojuholníkov, medzi kmeňmi stromov je vzdialenosť 8 metrov a priemer koruny každého stromu je 8 metrov. Aká je pravdepodobnosť, že parašutista ostane visieť na strome a nepadne na zem?



3.9. Označme S_i množinu všetkých celých čísel n takých, že $100i \leq n < 100(i + 1)$. Napríklad S_4 je množina čísel 400, 401, \dots , 499. Koľko z množín S_0, S_1, \dots, S_{999} neobsahuje druhú mocninu celého čísla?

3.10. Nájdite všetky usporiadané dvojice prvočísel (p, q) , pre ktoré platí $3p^2 + 6p = 2q^2 + 7q$?

3.11. Kladné celé čísla a, b, c, d spĺňajú $a > b > c > d$, $a + b + c + d - 1 = 2019$ a $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 - 1 = 2019$. Koľko rôznych hodnôt môže nadobúdať a ?

3.12. Koľkými rôznymi spôsobmi vieme vybrať 6 čísel z množiny $\{1, 2, \dots, 49\}$ tak, aby sme vybrali aspoň 2 po sebe nasledujúce čísla?