

1. časť

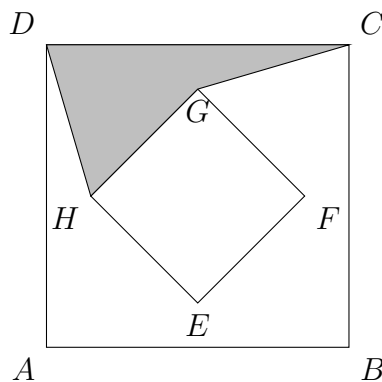
Úloha 1.1: Na kôpke leží 5 kariet, na ktorých sú postupne napísané čísla 1, 2, 3, 4 a 5. Viki, Mimi a Kristín si postupne vytiahli po jednej karte. Následne povedali:

- Viki: Na mojej kartičke je prvočíslo.
- Mimi: Na mojej kartičke je nepárne číslo.
- Kristín: Číslo na mojej kartičke má práve 2 deliteľov.

Bohužiaľ, všetky klamali. Aké číslo má na kartičke Mimi?

Úloha 1.2: Martin chodí do školy dvomi rôznymi spôsobmi po rovnakej ceste. Prvým spôsobom ide najprv 13 minút autobusom a potom 25 minút pešo. Druhým spôsobom ide najprv 20 minút autobusom a potom 11 minút pešo. Koľko minút by Martinovi trvalo, ak by mal prejsť celú cestu pešo?

Úloha 1.3: Štvorec $ABCD$ má dĺžku strany 12 a štvorec $EFGH$ má dĺžku strany 6. Priesečník uhlopriečok štvorca $ABCD$ je totožný s priesečníkom uhlopriečok štvorca $EFGH$. Zistite obsah štvoruholníka $HGCD$ (sivá plocha na obrázku).



Úloha 1.4: Majme kváder s celočíselnými dĺžkami hrán. Keď si vezmeme jeho dve steny, ktoré majú najväčší obsah, tak obsah každej je 240 a naopak obsah každej z dvoch najmenších stien je 48. Aký je obsah zvyšných dvoch stien? Nájdite všetky možnosti.

Úloha 1.5: Janka má na začiatku tréningu pravdepodobnosť $1/10$, že trafi terč. Janka je však veľmi učentlivá a s každým pokusom sa zmení jej pravdepodobnosť trafiť terč z $1/n$ na $1/(n-1)$. Aká je pravdepodobnosť, že sa jej prvý raz podarí trafiť terč v prvých šiestich pokusoch?

Úloha 1.6: Pre rôzne cifry X, Y, Z, W platí:

$$Z + W + W = X$$

$$Z + Z = \overline{WY}$$

$$Z \cdot Z = \overline{YX}$$

Určte hodnotu $X \cdot Y + Z \cdot W$. Zápis \overline{AB} reprezentuje číslo s ciframi A, B v tomto poradí (ak je cifra A rovná 0, ide o jednociferné číslo).

Úloha 1.7: Na futbalovom turnaji hrá 8 tímov, pričom každý s každým hrá práve raz. Za výhru tím dostane 2 body, za remízu 1 bod a za prehru 0. Koľko najmenej bodov musí tím získať, aby zaistil, že bude mať viac bodov ako aspoň štyri iné tímy (bez ohľadu na to, koľko bodov získajú ostatné tímy)?

Úloha 1.8: Majme kladné celé číslo n . V jednom kroku urobíme to, že od aktuálneho čísla odčítame jeho najmenšieho prvočíselného deliteľa. Po 1419 krokoch je naše aktuálne číslo prvočíslo. Nájdite všetky možnosti pre číslo n .

Úloha 1.9: Majme lichobežník $ABCD$, kde AB je rovnobežné s CD , uhol ABC má 125° a platí rovnosť $|AB| + |AD| = |CD|$. Určte veľkosť uhla ADC .

Úloha 1.10: Na tabuli sú napísané čísla 10^6 a 10^9 . Mihál na tabuľu v každom kroku napíše aritmetický priemer dvoch čísel na tabuli, ak výsledný priemer je celé číslo a ešte nie je napísaný na tabuli. Koľko čísel bude napísaných na tabuli v situácii, keď už Mihál nebude môcť pridať žiadne číslo?

Úloha 1.11: Nech m, n sú kladné celé čísla a p je prvočíslo. Vieme, že tieto čísla spĺňajú rovnicu $p^n + 3600 = m^2$. Aké všetky hodnoty môže nadobúdať číslo m ?

Úloha 1.12: Nech ABC je rôznostranný trojuholník, v ktorom strana AC je dlhšia ako AB . Bod P leží na úsečke BC tak, že priamka AP je osou uhla BAC . Priamka kolmá na AP prechádzajúca bodom B sa pretína s priamkou rovnobežnou s BC prechádzajúcou bodom A v bode D . Aká je dĺžka úsečky AD ak $|BP| = 2$ a $|PC| = 3$?

2. časť

Úloha 2.1: Na koncert predávajú dvakrát viac miest na státie než miest na sedenie. Z celkovej kapacity miest je predaná štvrtina miest na státie a polovica miest na sedenie. Aký je celkový počet miest v koncertnej sále, ak zatiaľ zostáva nepredaných celkom 1000 miest?

Úloha 2.2: Majme teleso so 62 stenami, pričom 20 z nich je rovnostranných trojuholníkov, 30 je štvorcov a 12 je pravidelných päťuholníkov. Koľko hrán má toto teleso?

Úloha 2.3: Aké je najmenšie kladné celé číslo k , pre ktoré platí, že $k!$ je deliteľné 1 000 000?

Úloha 2.4: Máme 6 hudobníkov, pričom každý z nich vie hrať na gitaru, klavír aj saxofón. Najprv jeden z nich zahrá na niektorý z troch hudobných nástrojov. Potom druhý z nich zahrá na nejaký iný hudobný nástroj a napokon tretí z nich zahrá na zvyšný hudobný nástroj. Koľkými rôznymi spôsobmi vedia zorganizovať vystúpenie?

Úloha 2.5: V pravouhlom trojuholníku KLM s pravým uhlom pri vrchole K je S stred kružnice jemu vpísanej. Aká je veľkosť uhla LSM ?

Úloha 2.6: Koľkými spôsobmi vieme napísať čísla 1 až 6 do vrcholov pravidelného šesťuholníka tak, aby práve pre tri z týchto čísel platilo, že sú väčšie ako obaja ich susedia v šesťuholníku? Otočenia a prevrátenia šesťuholníka sa považujú za rovnaké rozloženie.

Úloha 2.7: Števo si prišiel kúpiť do obchodu 5 jabĺk a 5 broskyň. Chcel zaplatiť päťeurou bankovkou, čo však nestačilo, teda pridal ešte ďalšiu päťeurú bankovku a dostal nejaký výdavok späť. Vilo si prišiel kúpiť 2 jabĺka a 12 broskyň a chcel zaplatiť desaťeurou bankovkou, čo nestačilo, a keď pridal ďalšiu desaťeurú bankovku, dostal nejaký výdavok späť. Koľko najmenej centov môže stáť 1 broskyňa?

Úloha 2.8: Majme pravidelný osemuholník $ABCDEFGH$ so stranou dĺžky 2. Uhlopriečka CF pretína úsečku AD v bode K a úsečku AE v bode L . Aký je obsah AKL ?

Úloha 2.9: Strom, ktorý má 75 rokov, má 50% pravdepodobnosť prežiť ešte aspoň ďalších 10 rokov. Zároveň má 75-ročný strom 20% pravdepodobnosť prežiť ešte aspoň ďalších 15 rokov. Strom, ktorý má 80 rokov, má 25% pravdepodobnosť prežiť aspoň ďalších 10 rokov. Akú pravdepodobnosť má 80-ročný strom prežiť aspoň ďalších 5 rokov?

Úloha 2.10: V lichobežníku $ABCD$ so základňami AB a CD má strana AB dĺžku 7, strana CD dĺžku 3 a strana DA dĺžku 10. Označme E stred strany BC . Potom platí, že $|AE| = 8$. Aký je obsah lichobežníka $ABCD$?

Úloha 2.11: V kruhu máme postavené domy očíslované od 1 do 20 v smere hodinových ručičiek. Medzi domami vieme prechádzať iba podľa určitých pravidiel. Buď môžeme prejsť do susedného domu v smere hodinových ručičiek (teda z 1 do 2, z 2 do 3, ..., z 20 do 1) alebo môžeme cez stred prejsť do protilahlého domu (teda medzi 1 a 11, 2 a 12, ..., 10 a 20). Určte počet možností, ktorými sa vieme dostať z domu číslo 10 do domu číslo 20 tak, aby sme žiaden dom nenavštívili viackrát.

Úloha 2.12: Nech a, b, c sú reálne čísla, pre ktoré platí, že polynóm

$$g(x) = x^3 + ax^2 + x + 10$$

má tri rôzne korene a každý koreň $g(x)$ je tiež koreňom polynómu

$$f(x) = x^4 + x^3 + bx^2 + 100x + c.$$

Aká je hodnota $f(1)$?

3. časť

Úloha 3.1: Existujú tri druhy magických bytostí. Draci majú 3 oči a 5 rohov, čerti majú 2 oči a 3 rohy a chudáci kyklopi majú 1 oko a žiadne rohy. Na lúke je niekoľko bytostí, ktoré majú spolu 25 očí. Koľko najviac môže byť na lúke rohov?

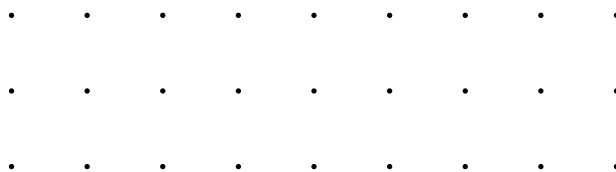
Úloha 3.2: V triede je 30 žiakov. Z toho 25 vie hrať futbal, 22 z nich vie hrať basketbal a 19 z nich vie hrať volejbal. Koľko žiakov vie hrať všetky tri športy, ak vieme, že každý žiak vie hrať aspoň dva športy?

Úloha 3.3: V trojuholníku ABC s obsahom 80 má strana AB dĺžku 20 a strana BC dĺžku 17. Označme D päť výšky z bodu C . Aká je dĺžka úsečky AD ?

Úloha 3.4: V zošite boli napísané 4 kladné celé čísla. Potom Michal pre každú dvojicu čísel zo zošita napísal na tabuľu ich súčin. Uvedomil si, že medzi číslami napísanými na tabuľu sú iba štyri rôzne čísla. Najmenšie z nich bolo 49 a druhé najväčšie 63. Aké bolo najväčšie číslo, ktoré Michal napísal na tabuľu?

Úloha 3.5: Nech n je celé číslo väčšie ako 1. Autobus vyrazil z garáže už s niekoľkými cestujúcimi. Na každej ďalšej zastávke vystúpil jeden cestujúci a n cestujúcich nastúpilo. Po piatich zastávkach bolo v autobuse n -krát viac cestujúcich ako na začiatku pred prvou zastávkou. Koľko cestujúcich bolo v autobuse na začiatku?

Úloha 3.6: Koľko priamok prechádza aspoň 3 bodmi mriežky 3×9 bodov?



Úloha 3.7: Majme rovnobežník $ABCD$. Na polpriamke BC mimo úsečky BC leží bod E tak, že platí $|BC| : |CE| = 2$. Na polpriamke AB mimo úsečky AB leží bod F tak, že platí $|AB| : |BF| = 3$. Aký je obsah rovnobežníka $ABCD$, ak vieme, že $S_{ABCD} - 10 = S_{DEF}$?

Úloha 3.8: Nech x, y sú reálne čísla, pre ktoré platí

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y}.$$

Určte hodnotu výrazu

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2.$$

Úloha 3.9: Nech $ABCD$ je štvorec a X je bod na strane DA taký, že kružnica s priemerom CX sa dotýka strany AB . Ak $|AX| = 1$, tak aká dlhá je strana štvorca $ABCD$?

Úloha 3.10: Majme rastúcu postupnosť všetkých kladných celých čísel, ktoré sú súčtom niekoľkých (aspoň jednej) rôznych mocnín trojky. Postupnosť začína číslom $3^0 = 1$. Aký je stý člen tejto postupnosti?

Úloha 3.11: Do miestnosti vojde 10 osôb. Každá z nich sa vyzuje a položí svoj pár topánok do skrinky. Potom príde škriatok, topánky zamieša a náhodne spáruje tak, že v každom páre bude jedna ľavá a jedna pravá topánka. Topánky v pomiešaných pároch môžu, ale nemusia patriť tej istej osobe. Aká je pravdepodobnosť, že pre žiadne $k < 5$ neexistuje k vytvorených párov tvorených topánkami patriacimi práve k osobám?

Úloha 3.12: Nájdite najmenšie kladné celé číslo n také, že každý z intervalov $\langle n^2, (n+1)^2 \rangle$, $\langle (n+1)^2, (n+2)^2 \rangle$, ..., $\langle (n+100)^2, (n+101)^2 \rangle$ obsahuje násobok 1001.