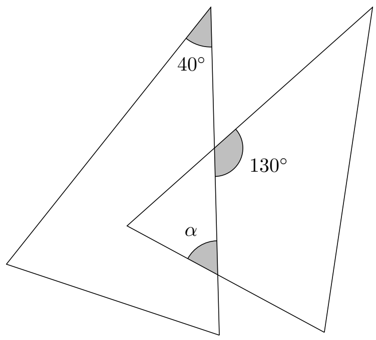
1. časť

Úloha 1.1: Máme dva rovnoramenné podobné trojuholníky, ktoré sa prekrývajú ako na obrázku. Aká je veľkosť uhla α?



Úloha 1.2: Mirka napísala minulý týždeň štyri testy. Priemerný počet bodov, ktorý dostala z prvého, druhého a tretieho testu, bol 65. Jej priemerný počet bodov z druhého, tretieho a štvrtého testu bol 80. Na štvrtom teste dostala dvakrát viac bodov ako na prvom teste. Koľko bodov získala Mirka na prvom teste?

Úloha 1.3: Aké existuje najmenšie číslo, ktorého súčin cifier je 2160?

Úloha 1.4: Súčet kladného celého čísla n a jeho cifier je 204. Určte všetky možné hodnoty n.

Úloha 1.5: Hodnota smaragdu vážiaceho S gramov je $1000S^2$. Ametyst vážiaci A gramov má hodnotu $30A$. Dvaja dedičia zdedili pozostalosť tvorenú smaragdmi a ametystami v celkovej hodnote troch miliónov. Rozdelili si ju tak, že každý drahokam rozpílili napoly a zobrali si po polovici. Každému dedičovi sa tak ušli drahokamy v hodnote osemstotisíc. Akú hodnotu mali všetky ametysty v pozostalosti?

Úloha 1.6: Na kružnici s polomerom r zvoľme nezávisle dva body. Z každého bodu zostrojme tetivu dĺžky r v smere hodinových ručičiek. Aká je pravdepodobnosť, že sa tieto dve tetivy pretnú?

Úloha 1.7: Figúrka sa môže po mriežke pohybovať hore, doprava a dole. Aspoň raz za každé dva ťahy sa ale pohne doprava. Koľko existuje rôznych ciest dĺžky 16 z bodu $[0, 0]$ do $[10, 0]$?

Úloha 1.8: Nech x je periodické číslo s jednocifernou alebo dvojcifernou periódou, pričom $0 < x < 1$. Vyjadrime si x v tvare zlomku v základnom tvare ako a/b. Koľko rôznych hodnôt môže dosahovať prirodzené číslo b?

Úloha 1.9: Dva rôzne pravidelné štvorsteny majú vrcholy vo vrcholoch jednotkovej kocky. Aký je objem prieniku daných štvorstenov?

Úloha 1.10: Martinova zásuvka obsahuje iba čierne a biele ponožky, spolu menej ako 50 ponožiek. Ak vytiahne dve ponožky náhodne, pravdepodobnosť, že dostane pár rovnakej farby, je 0,5. Aký je najväčší počet čiernych ponožiek, ktoré môže mať v zásuvke?

Úloha 1.11: Daný je rovnobežník $LEFT$ s obsahom 100. Na úsečke LT leží bod N taký, že $|LN| : |NT| = 3 : 2$. Na úsečke LF leží bod O taký, že $|LO| : |OF| = 2 : 3$. Priamka NO pretína úsečku EF v bode G. Aký je obsah štvoruholníka $LEGO$?

Úloha 1.12: Vyberieme náhodne pár reálnych čísel (a, b), ktoré spĺňajú $a^2 + b^2 \leq 1/4$. Aká je pravdepodobnosť, že krivky dané rovnicami $y = ax^2 + 2bx - a$, $y = x^2$ sa pretínajú?

2. časť

Úloha 2.1: Váza plná vody váži 7 kilogramov. Keď z vázy vylejeme 3/5 vody, váži už len 3 kilogramy. Koľko kilogramov váži prázdna váza?

Úloha 2.2: Nájdite všetky prvočísla, ktorých dvadsaťnásobok je druhou mocninou celého čísla.

Úloha 2.3: Vypočítajte aritmetický priemer čísel 9, 99, 999, …, 999 999 999.

Úloha 2.4: V obdĺžniku $ABCD$ má strana AD dĺžku 1, bod P leží na strane AB a úsečky DB a DP delia uhol ADC na tretiny. Aký je obsah trojuholníka BDP?

Úloha 2.5: V Nižnej Kreslenej žije taký počet obyvateľov, že jeho tretina je druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla a jeho polovica treťou mocninou iného prirodzeného čísla. Zároveň je počet Nižnokreslenčanov najmenšie také kladné celé číslo. Koľko obyvateľov má obec Nižná Kreslená?

Úloha 2.6: Mravec si chce popozerať celú hraciu kocku. Svoju púť začína vo vrchole a počas púte chce navštíviť každý vrchol a stred každej zo stien. Akú najmenšiu vzdialenosť musí prejsť, ak má kocka dĺžku hrany 2 cm?

Úloha 2.7: Nájdite počet racionálnych čísel r takých, že $0 < r < 1$ a súčet čitateľa a menovateľa čísla r v základnom tvare je 1000.

Úloha 2.8: Parabolický kartár vie čítať karty, na ktorých sú napísané reálne čísla, a robiť s nimi dve operácie. Keď mu dám jednu kartu s číslom A, vráti mi ju a vytlačí novú kartu, na ktorej je číslo $A + 1$. Keď mu dám dve karty s číslami B a C v tomto poradí, vráti mi ich a vytlačí nové nanajvýš dve karty, na ktorých sú reálne korene polynómu $x^2 + Bx + C$ (podľa počtu koreňov môže vytlačiť iba jednu alebo žiadnu novú kartu). Mám iba jednu kartu, a to 361. Na koľko najmenej operácií viem obdržať kartu 19?

Úloha 2.9: Prehneme papier v tvare obdĺžnika, ktorého jedna strana je trikrát dlhšia ako druhá strana, tak, že jeden roh položíme na protiľahlý roh, čím nám vznikne päťuholník. Aký je obsah tohto päťuholníka, ak obsah pôvodného obdĺžnika je 1?

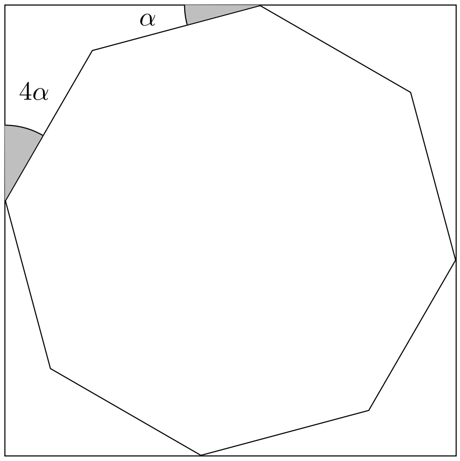
Úloha 2.10: Majme šachovnicu 8×8 a na nej v ľavom dolnom políčku figúrku. Figúrka sa môže pohybovať o jedno políčko doprava alebo hore. Okrem toho sa môže najviac jedenkrát pohnúť o jedno políčko doľava alebo dole. Koľkými rôznymi cestami vie skončiť v pravom hornom políčku?

Úloha 2.11: Koľko existuje šesťciferných čísel takých, že po odstránení ľubovoľnej cifry vznikne päťciferné číslo deliteľné 7?

Úloha 2.12: Postupnosť $(x_1, x_2, \dots)$ je definovaná nasledovne: $x_1 = 17$, $x_2 = 93$, $x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}$ pre všetky $n \geq 1$. Nájdite najmenšiu hodnotu k, pre ktorú platí $x_k = 0$.

3. časť

Úloha 3.1: Na obrázku sú pravidelný osemuholník a štvorec. Aká je veľkosť uhla α?



Úloha 3.2: Michal má v čajníku liter čaju. Čaj je horúci, a tak sa z neho konštantnou rýchlosťou vyparuje 1 deciliter za hodinu. Okrem toho každých 10 minút Michal príde a pol decilitra čaju vypije. Po koľkých minútach bude čajník prázdny?

Úloha 3.3: Štvorciferné číslo $\overline{ABCD}$ celočíselne vydelíme trojciferným číslom $\overline{ABC}$. Keď sčítame celočíselný podiel a zvyšok po delení, dostaneme druhú mocninu prirodzeného čísla. Aká je hodnota cifry D?

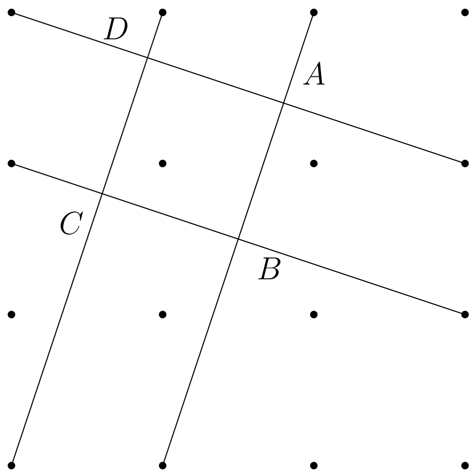
Zápis $\overline{ABC}$ vyjadruje číslo s ciframi A, B, C v tomto poradí.

Úloha 3.4: Koľko kladných štvorciferných čísel má súčin všetkých nenulových cifier rovný 12?

Úloha 3.5: Dané sú tri kruhy k, l, m s polomerom 1 a stredmi K, L, M. Kruhy k a l sa dotýkajú v bode N a kruh m sa dotýka priamky KL v bode N. Vyfarbíme kruhy k a l. Aký je obsah nevyfarbenej časti kruhu m?

Úloha 3.6: Nájdite najmenšie kladné celé číslo n, ktoré sa rovná súčinu troch rôznych prvočísel, také, že aritmetický priemer všetkých kladných deliteľov n nie je celé číslo.

Úloha 3.7: V mriežke majú susedné mrežové body vzdialenosť 1. Aký je obsah štvorca $ABCD$?



Úloha 3.8: Nech A, C sú dva protiľahlé vrcholy jednotkovej kocky a B, D sú stredy protiľahlých hrán neobsahujúcich vrcholy A, C. Aký je obsah štvoruholníka $ABCD$?

Úloha 3.9: Nájdite všetky celočíselné dvojice (x, y), pre ktoré platí $6x^2 - 3xy + 7y - 23x + 26 = 0$.

Úloha 3.10: Adam vloží do vreca šesť červených žetónov, Betka vloží do vreca sedem modrých žetónov a Cyprián vloží do vreca osem zelených žetónov. Potom robot vyťahuje žetóny náhodne z vreca jeden po druhom a vracia ich príslušným hráčom. Víťazom hry je prvý hráč, ktorý dostane všetky svoje žetóny späť. Nájdite pravdepodobnosť, že Betka vyhrá hru. Výsledok uveďte ako zlomok v základnom tvare.

Úloha 3.11: Pre (nekonečnú) postupnosť reálnych čísel $A = (a_1, a_2, a_3 \dots)$ definujme ΔA ako postupnosť $(a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots)$. Nájdite a_1 za predpokladu, že všetky prvky postupnosti $\Delta(\Delta A)$ sú 1 a $a_{19} = a_{32} = 0$.

Úloha 3.12: Na internáte sú poschodia označené číslami 1 až n a pokazený výťah. Keď vo výťahu stlačíme tlačidlo, výťah nás tam zavezie iba vtedy, ak rozdiel čísel aktuálneho poschodia a cieľového poschodia je deliteľný 2024 alebo ich súčet je deliteľný 2025. Ak nie je splnená ani jedna z týchto podmienok, výťah zostane stáť. Výťah nie je možné privolať zvonka. Koľko najmenej môže byť n, ak sa dá z každého poschodia dostať na každé iné?