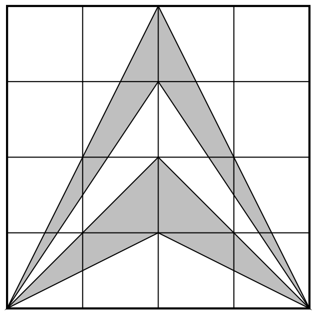
1. časť

Úloha 1.1: Určte súčet obsahov vyfarbených plôch vo štvorčekovej sieti, ak obsah jedného štvorčeka je 1.



Úloha 1.2: Súčet dvoch kladných čísel je 5-krát väčší ako ich rozdiel. Aký je pomer väčšieho čísla k menšiemu?

Úloha 1.3: Nájdite najmenšie kladné celé číslo, ktorého polovica je druhou mocninou celého čísla a tretina treťou mocninou celého čísla.

Úloha 1.4: Číslo nazveme *rastúce*, keď jeho cifry tvoria rastúcu postupnosť (napr. čísla 3, 2357, 12478 sú *rastúce*). Koľko existuje *rastúcich* kladných celých čísel?

Úloha 1.5: Trojuholník ABC má dĺžky strán 13, 14 a 15. Na stranách AB, BC a CA sú zvolené postupne body D, E, F tak, že trojuholníky CEF, ADF a BDE majú rovnaký obvod, ktorý je rovný 4/5 obvodu DEF. Určte obvod DEF.

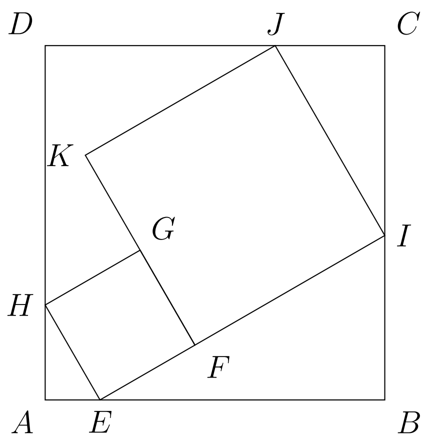
Úloha 1.6: Koľko existuje šesťciferných palindrómov deliteľných 7? (Palindróm je číslo, ktoré sa číta rovnako zľava aj sprava).

Úloha 1.7: Nájdite všetky možné dĺžky obvodov pravouhlých trojuholníkov s celočíselnými dĺžkami strán, v ktorých sa obvod rovná obsahu.

Úloha 1.8: Nech $ABCD$ je jednotkový štvorec. V štvorci nakreslíme oblúk kružnice so stredom v bode A, ktorého koncové body sú B a D. Podobne nakreslíme oblúk kružnice so stredom v bode B, ktorého koncové body sú A a C. Vpíšeme kružnicu, ktorá sa vnútorne dotýka oblúka AC, oblúka BD, a zároveň sa dotýka strany AB. Nájdite polomer tejto kružnice.

Úloha 1.9: Nech f je funkcia, ktorá číslo zapíše v dvojkovej sústave a následne z neho vynechaním núl vytvorí číslo v desiatkovej sústave. Napríklad $f(5)$ je 11, lebo 5 v dvojkovej sústave je 101 a keď z neho vynecháme nuly, tak dostaneme 11. Koľko existuje kladných celých čísel n menších ako 256, pre ktoré je $f(n)$ deliteľné číslom 37?

Úloha 1.10: Je daný štvorec $ABCD$ a v ňom štvorce $EFGH$ a $FIJK$ ako na obrázku. Body E, F, I ležia na jednej priamke a body E, I, J, H ležia na stranách štvorca $ABCD$. Obsah štvorca $EFGH$ je 2 a obsah štvorca $FIJK$ je 8. Určte dĺžku strany štvorca $ABCD$.



Úloha 1.11: Nájdite všetky reálne čísla x, pre ktoré platí: $(8^x + 27^x)/(12^x + 18^x) = 61/36$.

Úloha 1.12: Koľko neprázdnych podmnožín S množiny $\{1, 2, ..., 15\}$ má nasledujúce vlastnosti?

- S neobsahuje žiadne dve po sebe idúce čísla.
- Ak S obsahuje k prvkov, S neobsahuje žiadne číslo menšie ako k.

2. časť

Úloha 2.1: Vynásobíme všetky dvojciferné čísla deliteľné číslom 15. Výsledok delíme tromi, až kým neostane číslo, ktoré nie je deliteľné tromi. Aké číslo ostane?

Úloha 2.2: Koľko 9-ciferných kladných celých čísel s navzájom rôznymi nenulovými ciframi je deliteľných číslom 45?

Úloha 2.3: Nech a, b, c, d, e sú kladné celé čísla, pre ktoré platí $a < b < c < d < e$. Ich aritmetický priemer je 10, rozdiel medzi najväčším a najmenším číslom je 12 a $c = 7$. Zistite hodnotu d.

Úloha 2.4: V obchode vykúpilo n zákazníkov celú zásobu pistácií. Najprv prvý zákazník kúpil 10 balení plus desatinu zo zvyšných zásob. Potom druhý zákazník kúpil 20 balení plus desatinu zo zvyšných zásob. Takto to pokračovalo až kým n-tý zákazník kúpil $10n$ balení pistácií a v obchode vtedy už neostalo žiadne balenie. Ak všetci zákazníci kúpili rovnaké množstvo pistácií, koľko balení mal obchod pôvodne v zásobe?

Úloha 2.5: Zistite, koľkými spôsobmi môžeme z množiny $\{1, 2, 3, \ldots, 19, 20\}$ vybrať trojprvkovú podmnožinu, ktorej súčin prvkov je deliteľný štyrmi.

Úloha 2.6: Majme rovnostranný trojuholník ABC. Nech C je stredom kružnice k s polomerom menším než dĺžka strany AB. Body P a Q sú priesečníky k so stranami AC a BC. Kratší oblúk PQ je rovnako dlhý ako strana AB. Zistite obvod trojuholníka ABC, ak obvod útvaru $ABQP$ (zloženého z úsečiek a oblúku) je $4\pi - 6$.

Úloha 2.7: Nájdite najväčšie kladné celé číslo n také, že $100!/(n!)^5$ je celé číslo.

Úloha 2.8: Pre kladné celé číslo n označme $p(n)$ súčin všetkých jeho nenulových cifier. Určte hodnotu $p(1) + p(2) + \ldots + p(999)$.

Úloha 2.9: Daný je trojuholník ABC a bod D na strane BC. Aká je veľkosť úsečky AD, ak uhly CAD a DAB majú veľkosť 60 stupňov, veľkosť úsečky AC je 2 a veľkosť úsečky AB je 6?

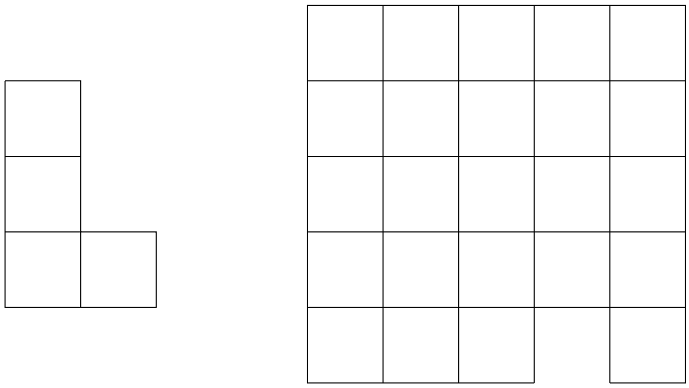
Úloha 2.10: Rovinou je vedený rez, ktorý zasiahol práve tie body, ktorých súradnice x, y spĺňajú $2x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3 - 3x^2 + 3y^2 = 0$. Tento rez rozdelí rovinu na niekoľko častí, z ktorých iba jedna má konečný obsah. Vypočítajte tento obsah.

Úloha 2.11: Nájdite všetky kladné celé čísla n, pre ktoré platí $n = 11111 \cdot c(n)$, kde $c(n)$ je ciferný súčet n.

Úloha 2.12: Majme reálne čísla a, b, c, pričom $c \neq 1$. Rovnice $x^2 + ax + 1 = 0$ a $x^2 + bx + c = 0$ majú spoločný reálny koreň. Rovnako aj rovnice $x^2 + x + a = 0$ a $x^2 + cx + b = 0$ majú spoločný reálny koreň. Určte hodnotu výrazu $a + b + c$.

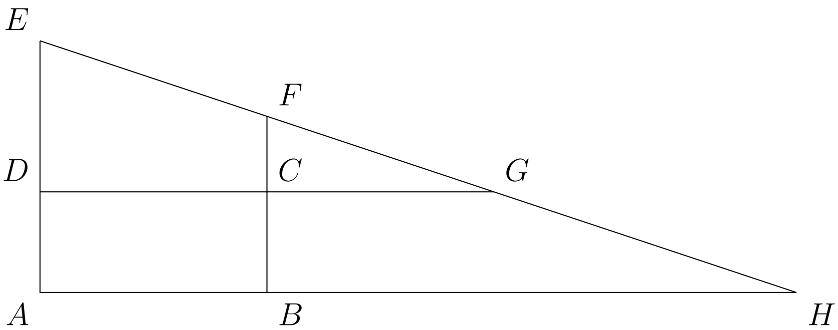
3. časť

Úloha 3.1: Koľko najviac tetromín tvaru L sa dá uložiť bez prekryvu do tabuľky na obrázku vpravo?



Úloha 3.2: V obchode predávajú tričká, nohavice a mikiny. Jedno tričko a dvoje nohavíc stoja dokopy toľko ako dve mikiny. Sedem nohavíc stojí toľko čo päť mikín a jeden kus z každého by dokopy stál 64 eur. Koľko eur stojí tričko?

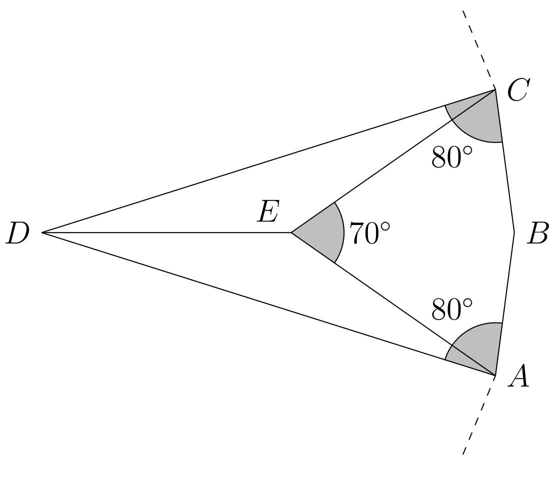
Úloha 3.3: Na obrázku vidíme obdĺžnik $ABCD$. Úsečka DE je predĺžením strany AD a má dĺžku 2, úsečka CF je predĺžením strany BC a má dĺžku 1, úsečka CG je predĺžením strany DC a má dĺžku 3 a napokon úsečka BH je predĺžením strany AB a má dĺžku 7. Body E, F, G a H ležia na jednej priamke. Aký je obsah obdĺžnika $ABCD$?



Úloha 3.4: V súčine $24^a \cdot 25^b \cdot 26^c \cdot 27^d \cdot 28^e \cdot 29^f \cdot 30^g$ bolo namiesto siedmich exponentov a, b, c, d, e, f, g v nejakom poradí dosadených sedem čísel 1, 2, 3, 5, 8, 10, 11. Nájdite najväčší počet núl, ktorými môže končiť tento súčin.

Úloha 3.5: Nájdite také číslo, že keď vynásobíte všetky jeho delitele, dostanete 10^{50}.

Úloha 3.6: Na obrázku sú AB a BC strany pravidelného n-uholníka, $|\sphericalangle DAB| = |\sphericalangle BCD| = 80°$, $|\sphericalangle CEA| = 70°$ a $|AE| = |CE| = |DE|$. Aká je hodnota n?

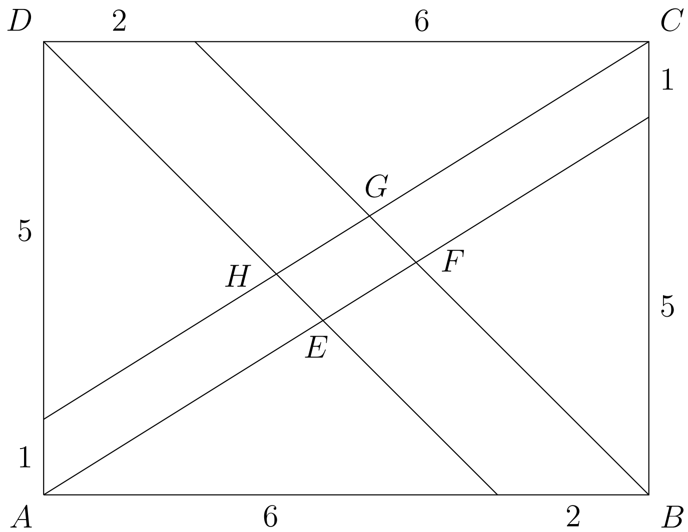


Úloha 3.7: Nech x a y sú kladné celé čísla spĺňajúce $2^{13} + 2^{10} + 2^x = y^2$. Nájdite najmenšie vyhovujúce y.

Úloha 3.8: Určte reálne u tak, aby bol súčet prevrátených hodnôt riešení kvadratickej rovnice najväčší možný:

$$u^2x^2 + (u-3)x + \frac{1}{u+11} = 0.$$

Úloha 3.9: Majme obdĺžnik $ABCD$ s vyznačenými dĺžkami ako na obrázku. Aký je obsah rovnobežníka $EFGH$?



Úloha 3.10: Na párty občas 7 alebo 15 ľudí odíde do vedľajšej miestnosti, kde každý každému daruje darček. Všetci ľudia okrem mňa už v súčte darovali 1994 darčekov. Najmenej koľkokrát som šla do vedľajšej miestnosti ja?

Úloha 3.11: Nech P a Q sú kvadratické polynómy s koeficientom 1 pri kvadratických členoch také, že $P(-1)/Q(-1) = P(1)/Q(1) = 3/2$ a $Q(6) = 5$. Koľko je $P(6)$?

Úloha 3.12: Množina G obsahuje body s celočíselnými súradnicami (x, y) takými, že $3 \leq |x| \leq 7$ a $3 \leq |y| \leq 7$. Koľko štvorcov so stranou dĺžky aspoň 6 má všetky vrcholy v množine G?