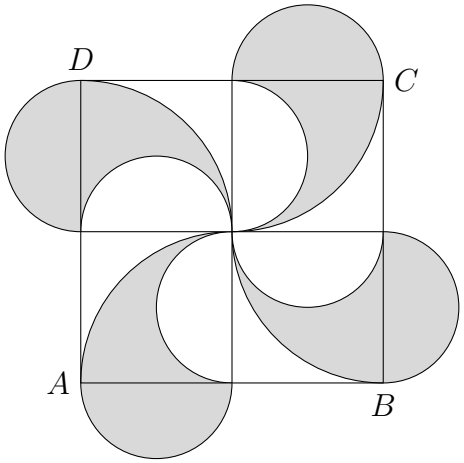
1. časť

Úloha 1.0: Aký je súčet čísel, ktoré povedal hlásateľ času počas tohto kola?

Úloha 1.1: Mimi šla na nákup za 200 eur. Platiť chcela len bankovkami s nominálnou hodnotou 200, 100, 50 a 20 eur. Koľkými spôsobmi môže nákup zaplatiť?

Úloha 1.2: Ak by Braňo dorazil domov o dve hodiny neskôr, ako naozaj prišiel, tak by do polnoci ostávala len tretina času, ktorý by do polnoci ostával, ak by sa omeškal iba o jednu hodinu. Kedy prišiel Braňo domov?

Úloha 1.3: Určte obsah sivej časti, ak sa útvar skladá z kruhových oblúkov a strana štvorca $ABCD$ má dĺžku 64.



Úloha 1.4: Martin má modré, zelené a červené guľôčky. Zistil, že 2 zelené guľôčky vážia toľko ako 2 červené guľôčky spolu s 1 modrou guľôčkou, a zároveň zistil, že 1 zelená a 1 červená guľôčka spolu vážia toľko ako 2 modré guľôčky. Koľkými spôsobmi vie zo zelených a červených guľôčok vybrať guľôčky tak, aby vážili toľko ako 15 modrých guľôčok?

Úloha 1.5: Nájdite všetky štvorice kladných celých čísel $a > b > c > d$ takých, že $10! = a!b!c!d!$.

Úloha 1.6: Pravidelný šesťuholník $MATBOJ$ a pravidelný osemuholník $BLUDISKO$ zdieľajú stranu BO a šesťuholník $MATBOJ$ leží v osemuholníku $BLUDISKO$. Aký je súčet veľkostí uhlov JSK a LTU?

Úloha 1.7: Čarovné číslo je také 5-ciferné číslo, ktorého cifry zľava doprava sú postupne jeho zvyškami po delení číslami 2, 3, 4, 5, 6. Vypíšte všetky čarovné čísla.

Úloha 1.8: Určte počet usporiadaných 2026-tíc $(a_1, a_2, \ldots, a_{2026})$ vzniknutých zoradením prvkov množiny $\{1, 2, \ldots, 2026\}$ takých, že číslo

$$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \ldots (a_{2026} - 2026)$$

je nepárne.

Úloha 1.9: Nech f je funkcia taká, že:

$$f(x,y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Tri reálne čísla a, b, c spĺňajú:

$$a + b + c = 6$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 7$$

Určte hodnotu:

$$f(a,b) + f(b,c) + f(c,a)$$

Úloha 1.10: Vo vnútri štvorca $ABCD$ sú zvolené body K a M. Bod M leží vo vnútri trojuholníka ABD a bod K vo vnútri trojuholníka BMC tak, že trojuholníky BAM a DKM sú zhodné ($|AM| = |KM|$, $|BM| = |MD|$, $|AB| = |KD|$) a $|\sphericalangle AMB| = 100°$. Určte veľkosť uhla KCM.

Úloha 1.11: Určte počet usporiadaných trojíc (a, b, c) nezáporných celých čísel spĺňajúcich rovnosť:

$$ab + bc + ca = 2(a + b + c)$$

Úloha 1.12: Paťo a Taly hrajú hru. Striedavo hádžu klasickou šesťstennou hracou kockou, až kým niekto nevyhrá. Ak niekedy nastane situácia, že padlo číslo od 1 do 3 vrátane a následne číslo 1 alebo 2, vyhrá Paťo. Ak zase dvakrát po sebe padne číslo od 4 do 6 vrátane, tak vyhrá Taly. Aká je pravdepodobnosť, že vyhrá Paťo?

2. časť

Úloha 2.1: Pred večerou na kuchynskom stole leží niekoľko lyžíc, vidličiek a nožov, dokopy 10 kusov. Deti jedia večeru lyžicou a dospelí vidličkou a nožom zároveň. Koľko rôznych počtov detí môže byť pri stole, ak každý dostal svoj príbor a všetky príbory boli rozdané? (Na večeri môže byť aj 0 detí alebo 0 dospelých.)

Úloha 2.2: Je daný obdĺžnik. Keby sme jeden z jeho rozmerov zväčšili o 8, jeho obsah by sa zväčšil o 24. Keby sme však o 8 zväčšili jeho druhý rozmer, jeho obsah by sa zväčšil o 56. Aký je obsah daného obdĺžnika?

Úloha 2.3: Majme kladné celé čísla a, b, c s nasledujúcimi vlastnosťami:

- $a < b < c$,
- a, b, c sú prvočísla,
- súčet čísel a, b, c je 42,
- súčet rozdielov $c - a$, $c - b$ a $b - a$ je tiež 42.

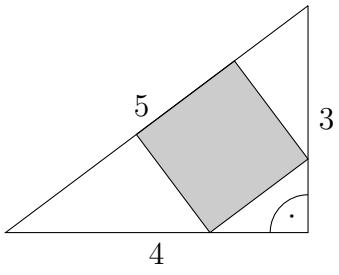
Aká je hodnota čísla b?

Úloha 2.4: Slimák lezie na bleskozvod vysoký 1 m a späť. Každý deň zdolá v smere svojej cesty 11 cm a každú noc sa zošmykne o 4 cm smerom dole. Vyrazí ráno prvého dňa a po dosiahnutí vrcholu sa okamžite vydá na spiatočnú cestu. Na koľký deň sa vráti na zem?

Úloha 2.5: Súčin deviatich po sebe idúcich kladných celých čísel je deliteľný číslom 1111. Aká je najmenšia možná hodnota, ktorú môže nadobúdať aritmetický priemer týchto deviatich čísel?

Úloha 2.6: V pravouhlom trojuholníku ABC majú strany dĺžky $|AB| = 13$, $|AC| = 5$ a $|BC| = 12$. Na strane AB je bod D tak, že obvody trojuholníkov ACD a BCD sa rovnajú. Aký je obsah trojuholníka ACD?

Úloha 2.7: Do pravouhlého trojuholníka s dĺžkami strán 3, 4 a 5 je vpísaný štvorec tak, že všetky jeho vrcholy ležia na stranách trojuholníka, pričom dva z nich ležia na prepone. Aký je obsah štvorca?



Úloha 2.8: Aké je najväčšie kladné celé číslo také, že každá jeho cifra okrem prvej a poslednej je menšia ako aritmetický priemer jej susedných dvoch cifier?

Úloha 2.9: Rovnice $x^2 + 2026ax + b = 0$ a $x^2 + 2026bx + a = 0$, kde $a \neq b$, majú spoločný reálny koreň. Aké všetky hodnoty môže ich spoločný koreň nadobúdať?

Úloha 2.10: Koľko je kladných celých čísel n takých, že

$$\frac{(n+1)^2}{n+23}$$

je tiež kladné celé číslo?

Úloha 2.11: Postupnosť je definovaná nasledovne:

- $a_1 = 1$,
- $a_2 = 2$,
- $a_3 = 3$,
- $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$ pre všetky $n \geq 3$.

Koľko existuje neprázdnych podmnožín množiny $\{a_1, \ldots, a_{20}\}$, ktorých súčet prvkov je rovný niektorému členu tejto postupnosti (nie nutne patriacemu do množiny $\{a_1, \ldots, a_{20}\}$)?

Úloha 2.12: Nech K a L sú stredy a q, resp. r polomery zvonka sa dotýkajúcich kružníc a M je ich dotykový bod. Nech N je priesečník ich spoločnej dotyčnice v bode M a niektorej ich vonkajšej spoločnej dotyčnice. Vyjadrite obsah trojuholníka KNL pomocou q a r.

3. časť

Úloha 3.1: V štvorci $ABCD$ je E stred strany AB a F stred strany BC. Obsah trojuholníka BFE je 2. Aká dlhá je strana štvorca?

Úloha 3.2: Koľko existuje usporiadaných dvojíc kladných celých čísel (a, b) takých, že $a^2 + b^2 = 50$?

Úloha 3.3: Máme karty s číslami od 1 do 50. Koľkými spôsobmi vieme vybrať dve karty tak, aby rozdiel čísel na kartách bol 11 a súčin bol deliteľný 5? Na poradí vybraných kariet nezáleží.

Úloha 3.4: V obchode predávajú CD-čka za 14, 15, 21 a 28 eur. Ak Evička kúpila CD-čka dokopy za 160 eur, koľko 15-eurových kúpila?

Úloha 3.5: Koľkými spôsobmi vieme vybrať niekoľko rôznych celých čísel od 1 do 6 vrátane tak, aby najmenšie z vybraných čísel bolo deliteľné počtom vybraných čísel?

Úloha 3.6: Je daná aritmetická postupnosť $(a_1, a_2, a_3, \dots)$, v ktorej $a_1 = 10$ a $a_{a_2} = 100$. Určte hodnotu $a_{a_{a_3}}$.

Úloha 3.7: Celé čísla od 1 do 60 chceme rozdeliť do 30 dvojíc. Koľkými spôsobmi to vieme urobiť tak, aby bol rozdiel čísel v každej dvojici rovnaký?

Úloha 3.8: Z celých čísel od 1 do 37 vrátane vyberte dvojicu čísel tak, aby súčin týchto dvoch čísel bol rovný súčtu zvyšných 35 čísel.

Úloha 3.9: V rovnobežníku $ABCD$ pretína os uhla ABC stranu AD v bode P tak, že $|PD| = 35$ a $|BP| = |CP| = 42$. Určte dĺžku strany AB.

Úloha 3.10: Máme funkciu f z reálnych čísel do reálnych čísel takú, že pre všetky reálne čísla x okrem 0 a 1 platí:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = 24x$$

Aká je hodnota $f(3)$?

Úloha 3.11: Pre ktoré kladné celé čísla n menšie ako 100 platí, že $n^2 + n - 9$ je deliteľné 101?

Úloha 3.12: Nech $p(n)$ je počet všetkých usporiadaných n-tíc núl a jednotiek takých, že sa v nich nevyskytujú tri po sebe idúce nuly. Určte $p(11)$.