1. časť

Úloha 1.1: Existujú tri prirodzené čísla n väčšie ako 1, pre ktoré platí, že ak číslom n vydelíme čísla 37 a 47, dostaneme rovnaký zvyšok. Určte súčet týchto troch čísel.

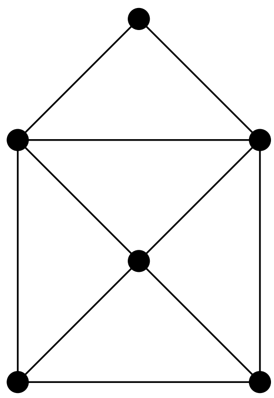
Úloha 1.2: Štyria kamaráti povedali nasledovné výroky:

- Matúš: „Dvaja z nás hovoria pravdu.“
- Martin: „Robo aj Paťo klamú.“
- Robo: „Paťo klame.“
- Paťo: „Matúš aj Robo hovoria pravdu.“

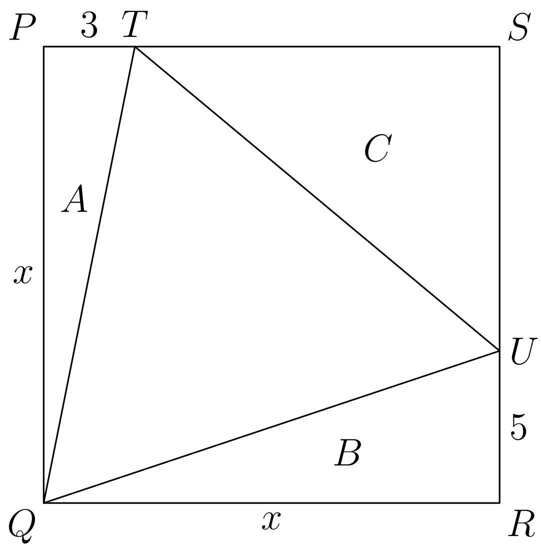
Napíšte mená všetkých kamarátov, ktorí hovorili pravdu.

Úloha 1.3: Dĺžky hrán kvádra tvoria tri po sebe idúce členy geometrickej postupnosti s koeficientom k (každý člen postupnosti vznikne z predchádzajúceho prenásobením číslom k). Dĺžky dvoch z hrán kvádra sú 5 a 8 centimetrov. Aký je najmenší možný objem kvádra?

Úloha 1.4: Koľkými spôsobmi vieme ofarbiť vrcholy domčeka dvoma farbami tak, aby žiaden trojuholník nemal všetky vrcholy jednej farby?



Úloha 1.5: Na obrázku je štvorec $PQRS$ a na jeho stranách sú vyznačené body T a U. Strany štvorca a úsečky QT, QU a TU oddeľujú tri plochy s obsahmi A, B a C. Vieme, že pre vyznačené obsahy plôch platí $A + B = C$. Zistite dĺžku strany x štvorca $PQRS$.



Úloha 1.6: Nájdite najmenšie kladné celé číslo n také, že n aj $n+1$ majú ciferný súčet deliteľný 14.

Úloha 1.7: Majme postupnosť celých čísel $\{a_k\}$, kde $a_1 = 1$ a $a_{n+m} = a_n + a_m + nm$ pre všetky kladné celé čísla m a n. Aká je hodnota a_{2022}?

Úloha 1.8: V nádobe sú 2 žlté, 4 červené a 6 modrých guľôčok. Po jednej ich vyťahujeme a zahadzujeme. Aká je pravdepodobnosť, že vytiahneme obe žlté guľôčky predtým, ako vytiahneme čo i len jednu červenú?

Úloha 1.9: Majme pravouhlý lichobežník, do ktorého je vpísaná kružnica, ktorá rozdeľuje jedno jeho rameno na dve časti s dĺžkami 4 a 9. Určte obsah lichobežníka.

Úloha 1.10: V krajine Stromákovo je 2022 miest, ktoré sú navzájom pospájané cestami. Platí, že z každého mesta idú 1 alebo 3 cesty. Taktiež platí, že z každého mesta sa vieme do akéhokoľvek iného mesta dostať práve jednou trasou (neexistuje cyklus). Koľko je miest, z ktorých vedia iba jedna cesta?

Úloha 1.11: Odvesny pravouhlého trojuholníka ABC s pravým uhlom pri vrchole C majú veľkosti a, b. Nad preponou tohto trojuholníka je zvonku zostrojený štvorec. Vypočítajte vzdialenosť stredu tohto štvorca od vrcholu C.

Úloha 1.12: Každú hranu pravidelného štvorstena ofarbíme jednou z troch farieb. Aká je pravdepodobnosť, že aspoň jeden vrchol susedí s hranami troch rôznych farieb?

2. časť

Úloha 2.1: Kuchárka naberá slimačiu polievku do misiek. Naberačka má objem 4 decilitre, no z každej plnej naberačky sa jej deciliter vyleje naspäť do hrnca. Na začiatku bolo v hrnci 5 litrov polievky. Koľko decilitrov polievky ostane kuchárke v hrnci, keď už nebude vedieť nabrať ďalšiu plnú naberačku?

Úloha 2.2: Nájdi súčet celočíselných riešení rovnice

$$3^{1+x} + 3^{1-x} = 10.$$

Úloha 2.3: Máme pravouhlý trojuholník s preponou o dĺžke 10, v ktorom veľkosť jedného uhla je dvojnásobkom veľkosti iného. Aký najväčší obsah môže mať daný trojuholník?

Úloha 2.4: Mucha sa prechádza po štvorčekovom papieri rozmerov $5 \times 5\,\mathrm{m}$. Štvorčeky na tomto papieri majú dĺžku strany $10\,\mathrm{cm}$. Mucha sa vydá na cestu po čiarach štvorčekovej siete a po prejdení $5\,\mathrm{m}$ sa ocitne na mieste, z ktorého vyšla. Aký najväčší obsah môže mať obrazec ohraničený trasou muchy?

Úloha 2.5: Nájdite počet neusporiadaných trojíc prirodzených čísel spĺňajúcich

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1.$$

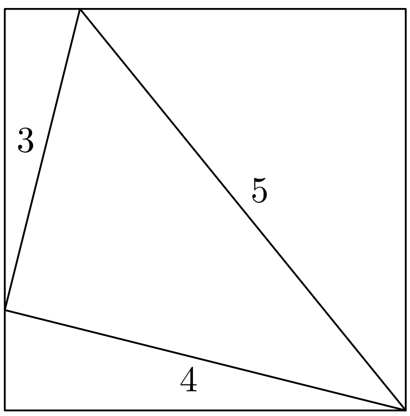
Úloha 2.6: Každý z hudobníkov ovláda hru na ukulele, bongo aj kazoo. V pondelok chceli vytvoriť kapelu s jedným hráčom na kazoo a troma hráčmi na bongo. Potom jeden z nich odcestoval do zahraničia, a tak sa v utorok rozhodli vytvoriť kapelu s jedným hráčom na ukulele, jedným hráčom na bongo a jedným hráčom na kazoo. Zistili, že oba dni mali rovnaký počet možností, ktorými danú kapelu poskladať (vybrať členov kapely a priradiť im jednotlivé hudobné nástroje). Koľko je všetkých hudobníkov?

Úloha 2.7: Vyriešte v obore reálnych čísel nasledujúcu sústavu rovníc:

$$\begin{aligned} x + xy + xy^2 &= 28 \\ x^2y + x^2y^2 + x^2y^3 &= 224. \end{aligned}$$

Nájdite všetky riešenia.

Úloha 2.8: Do štvorca je vpísaný trojuholník so stranami 3, 4 a 5. Akú dlhú má štvorec stranu?



Úloha 2.9: Každý zo šiestich stromákov má tričko inej farby. Ak si tieto tričká náhodne povymieňajú, s akou pravdepodobnosťou bude mať práve jeden stromák oblečené svoje tričko?

Úloha 2.10: Nech x, y sú kladné celé čísla. Nájdite všetky možné hodnoty $x^2 + y^2$, ak viete, že platí $x^2y + y^2x = 880$ a $xy + x + y = 71$.

Úloha 2.11: Nech $a_{10} = 10$ a pre všetky prirodzené n väčšie ako 10 platí $a_n = 100a_{n-1} + n$. Nájdite najmenšie prirodzené číslo n väčšie ako 10 také, že a_n je násobkom 99.

Úloha 2.12: Majme trojuholník ABC, kde $|AB| = 7$, $|BC| = 8$ a $|CA| = 9$. Nech AH je výška na stranu a. Nech BD a CE sú postupne osi uhlov ABC a BCA, pričom body D a E ležia na stranách trojuholníka ABC. Označme priesečník BD a AH ako Q a priesečník CE a AH ako P. Zistite dĺžku úsečky PQ.

3. časť

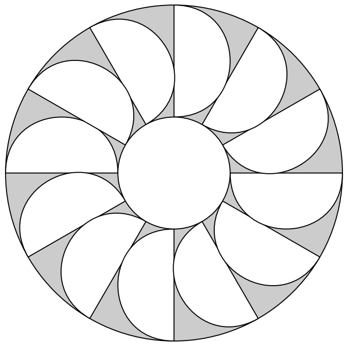
Úloha 3.1: Aké je najmenšie číslo deliteľné 12, ktoré sa skladá z práve šiestich jednotiek a ľubovoľného počtu troják a núl?

Úloha 3.2: Zistite, koľkokrát väčšie je číslo $x = 103!$ ako číslo $y = 101! + 102!$.

Úloha 3.3: V štvorčekovej sieti si zvolíme niekoľko mrežových bodov (bodov s celočíselnými súradnicami). Koľko najmenej bodov musíme zvoliť, aby sme si boli istí, že stred niektorej z úsečiek tvorenej zvolenými bodmi je tiež mrežovým bodom?

Úloha 3.4: Nájdite súčet všetkých cifier v prirodzených číslach menších ako 1000.

Úloha 3.5: Na obrázku máme dve sústredné kružnice a 12 zhodných dotýkajúcich sa polkruhov, ktoré ležia v medzikruží a krajnými bodmi sa dotýkajú kružníc. Priemery polkruhov ležia na priemere vonkajšej kružnice a zároveň ich veľkosť je zhodná veľkosti priemeru menšej zo sústredných kružníc. Aká časť medzikružia je zafarbená na sivo?



Úloha 3.6: Koľko existuje kladných celých čísel n, pre ktoré platí, že $n + 3$ delí $n^2 + 27$?

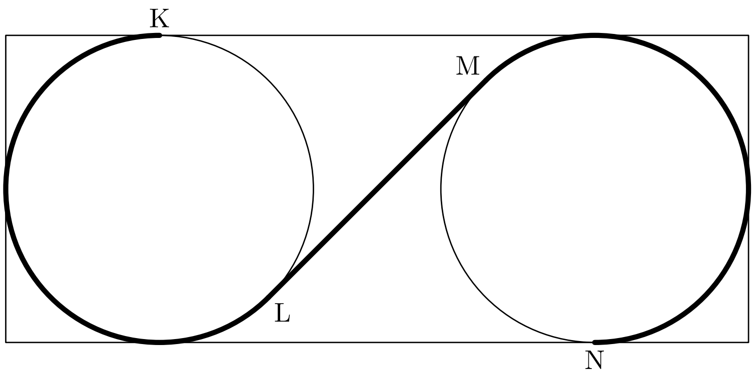
Úloha 3.7: Vrcholy pravidelného deväťuholníka sú očíslované číslami 1 až 9 tak, aby súčet čísel v troch susedných vrcholoch bol vždy násobkom 3. Dve očíslovania sú rovnaké, ak jedno dostaneme z druhého len otočením deväťuholníka v rovine. Koľko rôznych očíslovaní existuje?

Úloha 3.8: Majme dve kladné celé čísla m a n menšie ako 1000. Vieme, že ich aritmetický a geometrický priemer sú za sebou idúce nepárne čísla. Aký najväčší rozdiel môžu čísla m a n dosahovať?

Úloha 3.9: Pri piatich hodoch podvodníckou mincou je rovnaká pravdepodobnosť, že padne práve jedna hlava, ako pravdepodobnosť, že padnú práve dve hlavy. Aká je pravdepodobnosť, že padnú práve tri hlavy z piatich hodov?

Úloha 3.10: Koľko deliteľov čísla 2020^{2020} má presne 2020 deliteľov?

Úloha 3.11: Na obrázku vidíme písmeno S, ktoré je vytvorené z dvoch oblúkov KL a MN a z úsečky LM, ktorá je dotyčnicou oboch kružníc. Každý z oblúkov tvorí päť osmín obvodu kružnice s polomerom 1. Bodmi K a N prechádzajú dotyčnice oboch kružníc. Aká je dĺžka úsečky LM?



Úloha 3.12: Aké sú posledné dve číslice čísla $7^{7^{7^{7}}} - 1$?