1. časť

Úloha 1.1: V rade stojí 99 ľudí, z toho 98 klamárov a 1 pravdovravec. Klamári vždy klamú a pravdovravec vždy hovorí pravdu. Prvý človek v rade povie: „Medzi prvými 40 ľuďmi je pravdovravec.“ Posledný človek v rade povie: „Medzi poslednými 40 ľuďmi je pravdovravec.“ Prostredný (50.) človek v rade povie: „Ja som pravdovravec.“ Na koľkých rôznych pozíciách môže byť pravdovravec?

Úloha 1.2: Majme pravouhlý trojuholník, ktorého dlhšia odvesna má dĺžku 24 cm. Dĺžka tejto dlhšej odvesny je aritmetickým priemerom zvyšných dvoch dĺžok strán. Aký je súčet všetkých možných dĺžok, ktoré môže nadobúdať kratšia odvesna?

Úloha 1.3: V rovine sú dané dve kružnice s polomerom 1 a spoločným bodom A. Dotyčnice k nim v bode A sú na seba kolmé. Aká je vzdialenosť stredov týchto kružníc?

Úloha 1.4: Martin má piatich synov, ktorí majú postupne 1, 2, 3, 4 a 5 rokov a žiadnemu z nich sa najbližšie 2 dni nezmení vek. Na tieto dva dni im chce rozdeliť 34 cukríkov. Každý večer zje každé dieťa toľko svojich cukríkov, koľko má rokov. Okrem toho dá na druhý deň ráno (teda medzi dvoma večermi, kedy deti jedia cukríky) najstaršie dieťa najmladšiemu toľko cukríkov, koľko ich vtedy má najmladšie dieťa. Koľko možností má Martin na to, ako deťom cukríky rozdeliť tak, aby každé dieťa oba večery mohlo zjesť toľko cukríkov, koľko má rokov?

Úloha 1.5: Kladné celé číslo je rôznorodé, ak neobsahuje dve rovnaké cifry a neobsahuje nulu. Nájdite najväčšie prvočíslo, ktoré delí bezo zvyšku súčet všetkých rôznorodých štvorciferných kladných celých čísel.

Úloha 1.6: Daný je konvexný štvoruholník $ABCD$ s bodom E vnútri strany AB tak, že platí $|\sphericalangle ADE| = |\sphericalangle DEC| = |\sphericalangle ECB|$. Obsahy trojuholníkov AED a CEB sú postupne 18 a 8. Určte obsah trojuholníka ECD.

Úloha 1.7: Máme 3 modré, 3 červené a 3 žlté kocky. Modré kocky sú zaradom očíslované číslami 1, 2, 3. Rovnako sú očíslované aj červené a žlté kocky. 3 kocky tvoria set, ak platí aspoň jedna z nasledujúcich podmienok:

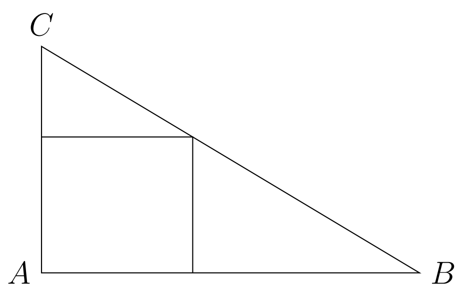
- Všetky majú rovnakú farbu.
- Všetky majú rovnaké číslo.
- Všetky majú navzájom rôzne farby.
- Všetky majú navzájom rôzne čísla.

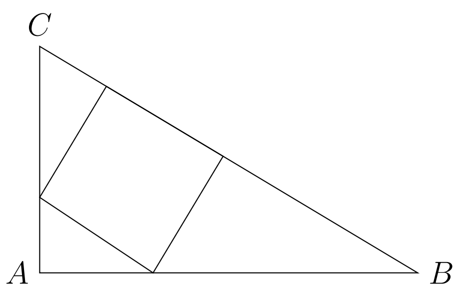
Chceme postaviť vežu z 3 kociek, ktoré tvoria set. Koľkými spôsobmi to vieme urobiť?

Úloha 1.8: Funkcia $f(x)$ spĺňa $f(3x) = 3f(x)$ pre všetky reálne x. Tiež platí $f(x) = 1 - |x - 2|$ pre x z intervalu $[1, 3]$. Nájdite najmenšie kladné x, pre ktoré platí $f(x) = f(2022)$.

Úloha 1.9: Z množiny čísel $\{1, 2, \ldots, 14\}$ chceme vybrať päťčíselnú podmnožinu tak, aby aspoň dve čísla boli po sebe idúce. Koľko takýchto rôznych podmnožín vieme vybrať?

Úloha 1.10: Majme pravouhlý trojuholník s dĺžkami odvesien 3 a 4. Dvomi rôznymi spôsobmi, ako na obrázku doň vpíšeme štvorec. Štvorec, ktorý leží na odvesnách má obsah S_1 a štvorec, ktorý leží na prepone má obsah S_2. Určte pomer obsahov štvorcov $S_1{:}S_2$ ako zlomok v základnom tvare.





Úloha 1.11: Nájdite všetky usporiadané trojice kladných celých čísel a, b, c, pre ktoré platí $a > c$ a ktoré spĺňajú obe nasledujúce rovnice:

$$ac + b + c = bc + a + 66$$

$$a + b + c = 32$$

Úloha 1.12: V Strome je 11 mužov a 12 žien. Chceme spomedzi nich vybrať Radu Stromu. Rada môže mať ľubovoľne veľa členov, ale podmienkou je, že počet žien bude práve o 1 väčší ako počet mužov. Počet spôsobov, koľkými vieme vybrať Radu Stromu označme ako n. Koľko rôznych deliteľov má číslo n?

2. časť

Úloha 2.1: Koľko existuje trojciferných čísel takých, že ich prostredná číslica je aritmetickým priemerom dvoch krajných číslic?

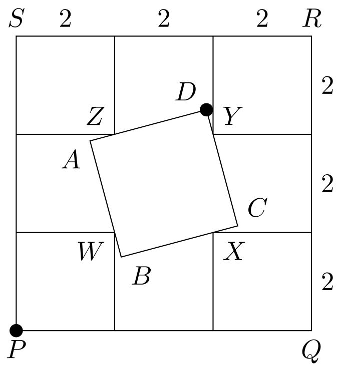
Úloha 2.2: Michal ukladá cukríky na niektoré políčka tabuľky 3×3 (na jednom políčku môže byť aj viac cukríkov). Potom si spočíta počet cukríkov v každom zo stĺpcov aj riadkov. Chce ich uložiť tak, aby bol každý z týchto šiestich súčtov iný. Koľko najmenej cukríkov musí použiť?

Úloha 2.3: Do kružnice sú vpísané rovnostranný trojuholník, štvorec a pravidelný šesťuholník. Dano spočítal rozdiel medzi obvodom šesťuholníka a štvorca. Peťo spočítal rozdiel medzi obvodom štvorca a trojuholníka. Súčet ich výsledkov bol $6\sqrt{2} - 3\sqrt{6}$. Určte polomer kružnice.

Úloha 2.4: Koľko deliteľov čísla 20^{22} je druhou mocninou celého čísla?

Úloha 2.5: Majme trojuholník ABC s uhlom $30°$ pri vrchole A. Nech S je stred kružnice opísanej trojuholníku ABC. Určte pomer obsahu trojuholníka BCS ku obsahu tejto kružnice.

Úloha 2.6: V rohoch štvorca $PQRS$ so stranou dĺžky 6 cm sú umiestnené štyri menšie štvorce so stranami dĺžky 2 cm. Označme ich vrcholy W, X, Y, Z ako na obrázku. Štvorec $ABCD$ je zostrojený tak, že body W, X, Y, Z ležia vo vnútri jeho strán AB, BC, CD, DA. Určte najväčšiu možnú vzdialenosť bodov P a D.



Úloha 2.7: Erik si chce posadiť kvetinkový rad. Sadí 3 druhy kvetov – fialky, tulipány a púpavy. Kvety sadí podla nasledujúcich pravidiel:

- Dve fialky nesmú byť zasadené hneď za sebou.
- Za tulipánom nesmie nasledovať nič iné ako púpava.

Koľko rôznych radov pozostávajúcich z 8 kvetov vie Erik vysadiť?

Úloha 2.8: Peťo mal jednu bankovku, ktorou zaplatil v prvom obchode. Predavač mu však nesprávne vydal, pretože si poplietol medzi sebou eurá a centy (napríklad namiesto 15,35 eura by mu vydal 35,15 eura). Peťo si to uvedomil až v druhom obchode, kde platil len 50 centov. Po tomto druhom nákupe totižto zistil, že mu zostalo presne trikrát toľko peňazí, koľko mu malo zostať po nákupe v prvom obchode. Koľko mu správne malo zostať po nákupe v prvom obchode?

Úloha 2.9: Daný je štvorec. Rozdelíme ho n rezmi v podobe priamok na niekoľko mnohouholníkov. Aký je najväčší možný súčet vnútorných uhlov všetkých mnohouholníkov v závislosti od n?

Úloha 2.10: Majme štvorec $ABCD$. Vnútri strany BC je bod E tak, že $|BE| = 36$. Vnútri strany CD je bod F tak, že $|DF| = 64$. Úsečka AF rozdeľuje uhol EAD na polovicu. Aká je dĺžka úsečky AE?

Úloha 2.11: Daný je štvorec. Rozdelíme ho rezmi v podobe priamok na n mnohouholníkov. Aký je najväčší možný súčet vnútorných uhlov všetkých mnohouholníkov v závislosti od n?

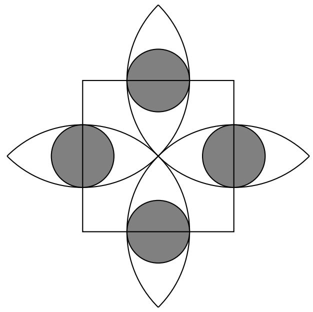
Úloha 2.12: Nájdite najmenšie reálne číslo k také, že pre všetky reálne čísla x, y

$$2x + 3y \leq k\sqrt{x^2 + y^2}.$$

3. časť

Úloha 3.1: Koľkými spôsobmi vedia byť celé čísla od -7 do 7 zoradené tak, aby ich absolútne hodnoty vo výslednej postupnosti boli nerastúce?

Úloha 3.2: Dĺžky strán štvorca na obrázku sú 2, polkružnice prechádzajú stredom štvorca a majú stredy v jeho vrcholoch. Vyznačené kruhy majú stredy na stranách štvorca a dotýkajú sa polkružníc. Určte súčet obsahov všetkých vyznačených kruhov.



Úloha 3.3: Majme kocku a uvažujme všetky trojuholníky s vrcholmi vo vrcholoch kocky. Koľko rôznych vnútorných uhlov sa v týchto trojuholníkoch objaví?

Úloha 3.4: Nájdite súčet všetkých reálnych čísel x, ktoré sú riešením rovnice:

$$(x^2 - 7x + 11)^{(x^2-13x+42)} = 1.$$

Úloha 3.5: Majme trojuholník ABC. V strede BC je bod N a niekde vo vnútri strany AB je bod M. AN sa pretína s MC v bode X. Niekde vo vnútri XC je bod Y. Poznáme nasledujúce obsahy: $S_{AMX} = S_{XNY} = s$, $S_{NYC} = 7$, $S_{BMXN} = 27$. Zistite veľkosť s.

Úloha 3.6: Nájdite všetky kladné celé n, pre ktoré platí táto rovnosť:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2022}.$$

Úloha 3.7: Nech $f(n)$ značí najmenšie prvočíslo, ktoré delí kladné celé číslo n väčšie ako 1. Nájdite všetky riešenia pre $n^2 + 2f(n) + 1 = (2m+1)^2$, kde m, n sú kladné celé čísla a n je väčšie ako 1.

Úloha 3.8: Aké je najmenšie k také, že každá podmnožina veľkosti k množiny $\{1, \dots, 2022\}$ musí obsahovať dvojicu čísel, ktoré sa líšia práve o 22?

Úloha 3.9: Nájdite najväčšie kladné celé číslo n také, že $n = a^2 + b^2$, kde a je najmenší deliteľ n rôzny od 1 a b je hocijaký deliteľ n.

Úloha 3.10: Majme mnohosten, ktorý nemá dve steny ležiace v jednej rovine ani dve hrany ležiace na jednej priamke. Aký je najvyšší počet hrán, pre ktorý takýto mnohosten neexistuje?

Úloha 3.11: Majme 25-uholník. Koľkými spôsobmi z neho vieme vybrať 5 vrcholov tak, aby medzi každými dvoma vybratými vrcholmi boli aspoň 3 nevybraté vrcholy?

Úloha 3.12: Graf kubického polynómu x^3+ax^2+bx+c vytína na nejakej priamke rovnobežnej s osou x dve úsečky dĺžky 1. Zároveň vytína dve úsečky aj na niektorej priamke rovnobežnej s priamkou $x = y$. Dĺžka jednej z týchto úsečiek je $\sqrt{2}$. Aká je dĺžka druhej z nich?