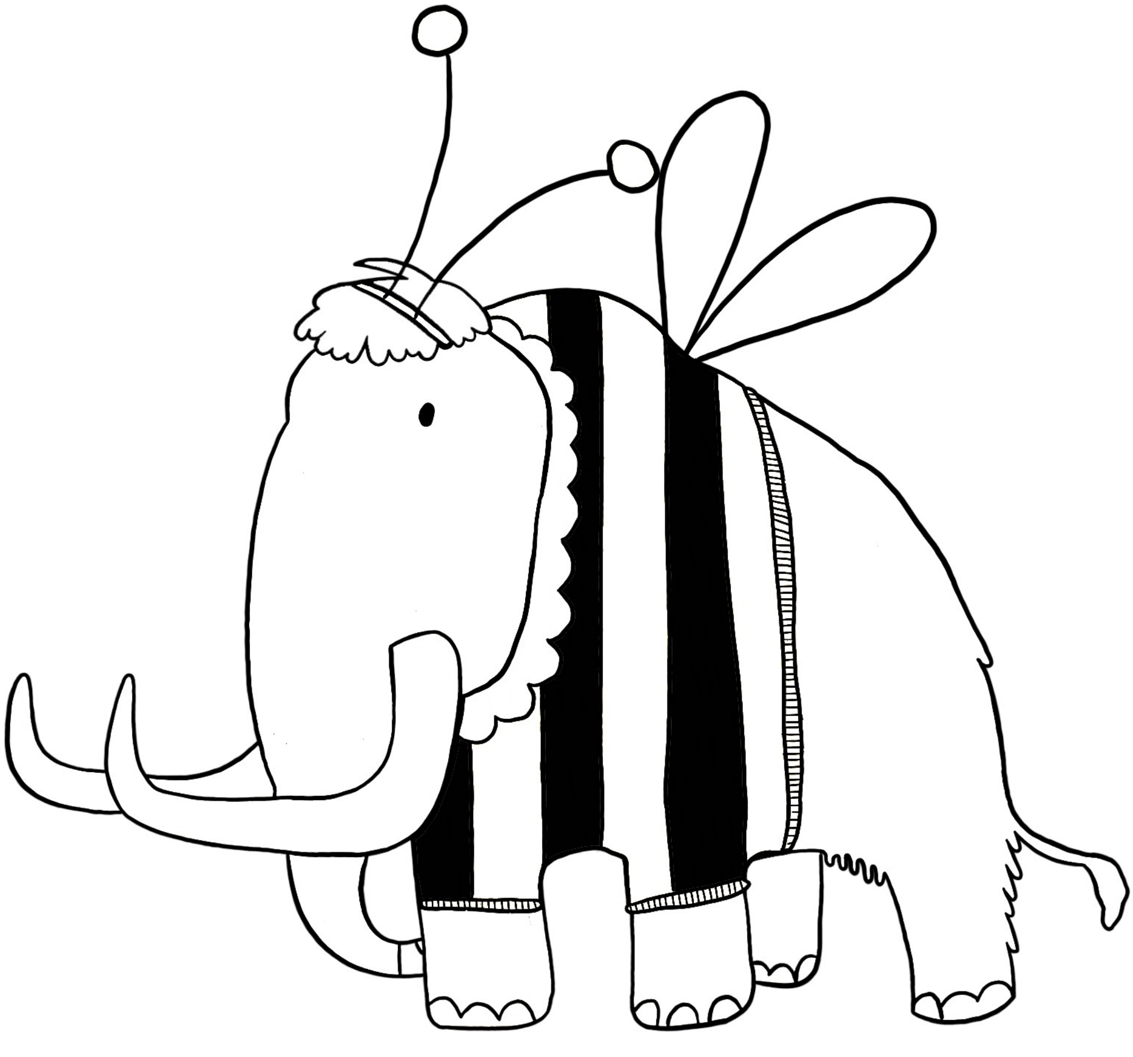
STROM



Mamut

Košice & Poprad, 29. 5. 2026

Rozcvička

Rozcvička 1:

Čmeliak Bzučo si písal do radu čísla: 7, 14, 21, 28. Aké číslo nasleduje?

Výsledok: 35

Riešenie:

Vidíme, že v rade sa čísla zvyšujú stále o 7. Takže keď k štvrtému číslu pripočítame 7, dostaneme piate číslo, ktorým je 28 + 7 = 35.

Rozcvička 2:

Čmeliak Bzučo si kúpil 2 vanilkové a 3 čokoládové zmrzliny. Každá zmrzlina stála 2 eurá a 50 centov. Koľko zaplatil Bzučo dokopy?

Výsledok: 12 eur a 50 centov

Riešenie:

Bzučo si dokopy kúpil 2 + 3 = 5 zmrzlín. Každá z nich stála 2 eurá a 50 centov. Takže 5 zmrzlín muselo stáť 2 · 5 = 10 eur a 50 · 5 = 250 centov. Ale keďže 250 centov sú iba 2 eurá a 50 centov, tak spoločná cena bola 10 + 2 = 12 eur a 50 centov.

Rozcvička 3:

Čmeliak Bzučo a slimák Dunčo sa dohodli, že sa stretnú na súťaži Mamut o 9:00. Bzučo chcel prísť o 25 minút skôr, aby obsadil dobré miesto, no nakoniec sa ešte 6 minút zdržal. Slimák Dunčo, ako vždy, meškal 7 minút. Ako dlho čakal Bzučo na Dunča?

Výsledok: 26 minút

Riešenie:

Bzučo chcel prísť o 25 minút skôr, ale keďže sa zdržal ešte 6 minút tak nakoniec prišiel iba o 25 - 6 = 19 minút skôr. Naopak Dunčo meškal 7 minút. To znamená, že Bzučo na Dunča dokopy čakal 19 + 7 = 26 minút.

Rozcvička 4:

Vždy, keď slimák Dunčo klame, predĺžia sa mu tykadlá o 6 mm. Vždy, keď povie pravdu, sa mu tykadlá skrátia o 2 mm. Jeho tykadlá mali ráno 9 mm. Dnes povedal tri klamstvá a dve pravdy. Aké dlhé tykadlá má teraz?

Výsledok: 23 mm

Riešenie:

Keďže dnes povedal tri klamstvá, tak sa mu predĺžili o 6 mm · 3 = 18 mm. A keďže aj dvakrát hovoril pravdu, tak sa mu skrátili o 2 mm · 2 = 4 mm. Na začiatku mal tykadlá dlhé 9 mm, potom sa mu predĺžili o 18 mm a skrátili o 4 mm, to znamená, že teraz má tykadlá dllhé 9 mm + 18 mm - 4 mm = 23 mm.

Rozcvička 5:

Mamut Miško sa chce rozcvičiť. Keď spraví jeden drep, každá jeho noha spáli 5 kalórií. Koľko kalórií spáli, keď spraví jeden drep?

Výsledok: 20

Riešenie:

Miško má štyri nohy, keď každá z nich spáli 5 kalórií, tak dokopy spália 5 + 5 + 5 + 5 = 20 kalórií.

Ľahké

Ľahké 1:

Čmeliak Bzučo má tri žlté a štyri čierne pruhy. Koľko pruhov má dokopy?

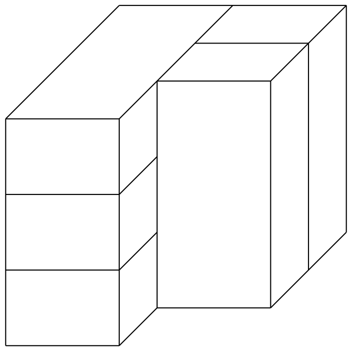
Výsledok: 7

Riešenie:

Aby sme zistili, koľko má Bzučo dokopy pruhov, stačí sčítať všetky žlté a všetky čierne, čím zistíme, že výsledok je 3 + 4 = 7.

Ľahké 2:

Na obrázku je 5 rovnakých tehál peľu, ktoré naskladali v úli čmeliaka Bzuča. Koľko tehál peľu sa dotýka presne troch ďalších tehál?



Výsledok: 2

Riešenie:

Aby sme prišli na to, koľko tehál sa dotýka presne ďalších troch tehál, len spočítame, koľkých tehál sa dotýka každá tehla. Takto zistíme, že presne troch ďalších tehál sa dotýkajú iba 2 tehly, a to ľavá horná a ľavá dolná tehla. Všetky ostatné tehly sa dotýkajú štyroch ďalších tehál.

Ľahké 3:

V priebehu troch po sebe idúcich futbalových zápasov skóroval tím *FC Čmeliaci* 3 góly a dostal len 1 gól. Jeden z týchto zápasov vyhral, jeden prehral a jeden remízoval. Akým výsledkom skončil zápas, ktorý vyhral?

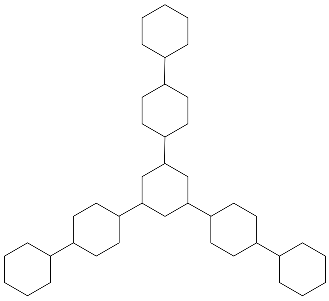
Výsledok: $3:0$

Riešenie:

Keďže jeden zápas prehrali a dostali za všetky zápasy dokopy len 1 gól, tak výsledok zápasu, ktorý prehrali musel byť 0:1. Ďalej už súperi tímu *FC Čmeliaci* nedali ani gól, teda pri remíze, musel byť výsledok $0:0$. Keďže doposiaľ nedali *FC Čmeliaci* ani gól, tak všetky tri museli dať v zápase, ktorý vyhrali. Nakoľko súperi už žiaden gól nedali, tak zápas, ktorý vyhral tím *FC Čmeliaci*, skončil $3:0$.

Ľahké 4:

Čmeliak Bzučo chce do plástov vpísať čísla 2, 3, 4, 5, 6, 7 a 8, každé práve raz. Zároveň musí platiť, že súčet čísel v každej trojici plástov ležiacich na jednej priamke je rovnaký. Aký najväčší môže byť tento súčet?



Výsledok: 17

Riešenie:

V úlohe máme tri trojice plástov na jednej priamke. Všetky trojice majú rovnaký súčet a zdieľajú jedno spoločné políčko (stredné políčko). Číslo v tomto políčku sa započíta do každého zo súčtov, preto chceme aby bolo čo najväčšie.

Najprv si do stredného plástu skúsime dosadiť najväčšie z čísel, teda 8 a pokúsime sa vyplniť zvyšok plástov. Rozdeľme čísla do skupín, tak aby každá z nich mala rovnaký súčet. To vieme urobiť spôsobom: (2, 7), (3, 6), (4, 5). Každá z týchto dvojíc má súčet 9 a teda s nimi môžeme vyplniť zvyšné plásty. Takže každá z trojíc plástov bude mať súčet $9 + 8 = 17$

Ľahké 5:

Do plástu tvaru mriežky 3 × 3 chce čmeliak Bzučo vpísať 3-krát písmená *A*, *B* a *C* tak, že každý riadok a každý stĺpec obsahuje 3 rôzne písmená. Koľkými spôsobmi vie Bzučo vyplniť plást, ak v pravom hornom políčku je písmeno *A*?

Výsledok: 4

Riešenie:

Uvedomme si, že ak vyplníme jeden riadok a jeden stĺpec, tak už dokážeme doplniť celú tabuľku. Napríklad písmeno *C* už bude v tabuľke dvakrát, a to v dvoch rôznych stĺpcoch a dvoch rôznych riadkoch podľa pravidla. Potom jediné správne umiestnenie pre tretie *C* bude práve v jedinom štvorčeku, ktorý je prienikom riadku a stĺpca, kde ešte *C* nie je. Takto vieme dopísať aj tretie *B* a zvyšné dve políčka potom budú musieť byť vyplnené písmenom *A*.

V pravom hornom políčku musí byť písmeno *A*. Podľa pravidla o neopakovaní písmen, vľavo od neho v hornom riadku musí byť písmeno *B* a potom *C* alebo *C* a potom *B*.

Pozrime sa na **prvý prípad**, nech horný riadok vyzerá takto: *C*, *B*, *A*. Vyberieme si stĺpec na doplnenie, napr. pravý stĺpec. Je v ňom zatiaľ iba písmeno *A*, teda pod neho podľa pravidla môžu ísť *B* a potom *C* alebo *C* a potom *B*, máme dve možnosti:

1. Ak by pravý stĺpec vyzeral takto: *A*, *B*, *C*, doplnená tabuľka musí vyzerať takto:

C	B	A
A	C	B
B	A	C

2. Ak by pravý stĺpec vyzeral takto: *A*, *C*, *B*, doplnená tabuľka musí vyzerať takto:

C	B	A
B	A	C
A	C	B

Pozrime sa na **druhý prípad**, nech horný riadok vyzerá takto: *B*, *C*, *A*. Znova pod *A* môže ísť *B* a potom *C* alebo *C* a potom *B*. Opäť nám vznikajú dve možnosti.

1. Ak by pravý stĺpec vyzeral takto: *A*, *B*, *C*, doplnená tabuľka musí vyzerať takto:

B	C	A
C	A	B
A	B	C

2. Ak by pravý stĺpec vyzeral takto: *A*, *C*, *B*, doplnená tabuľka musí vyzerať takto:

B	C	A
A	B	C
C	A	B

Teda existujú 4 tabuľky, ktoré vyhovujú pravidlu, že každé písmeno je práve raz v každom stĺpci aj riadku.

Ľahké 6:

Bzučo, Meduška, Žltinka a Trubko idú autom domov z výletu, pretože majú unavené krídelká, ale len Trubko a Žltinka vedia šoférovať. Koľko je možností, ako ich usadiť do auta, ak má auto jedno miesto pre vodiča, jedno pre spolujazdca a dve rôzne miesta vzadu?

Výsledok: 12

Riešenie:

Máme štyri včielky, a to Bzuča, Medušku, Žltinku a Trubka. V aute sú dokopy štyri miesta. Jedno z nich (miesto vodiča) je špeciálne, pretože na ňom môže sedieť iba Trubko a Žltinka. Na zvyšných miestach môžu sedieť všetky štyri včielky.

Úlohu vyriešime tak, že si najprv postupne povieme, koľko včielok môže sedieť na konkrétnom mieste. Na miesto šoféra máme 2 možnosti. Na miesto spolujazdca máme 3 možnosti, pretože jedna včielka už sedí na mieste šoféra. Na zadné pravé sedadlo nám potom zvýšia už iba 2 včielky, na zadné ľavé sedadlo nám ostane iba 1 včielka.

Teraz už len musíme vypočítať počet všetkých možností, ako môžu včielky sedieť. Ak by na mieste šoféra sedel Trubko, tak by na mieste spolujazdca mohli sedieť 3 rôzne včielky. Rovnako by to bolo, ak by na mieste šoféra sedela Žltinka. Všimnime si, že počet všetkých možností, ako môžme usadiť včielky vpredu, bude $2 \cdot 3 = 6$, pretože pre každú možnosť na mieste šoféra máme k dispozícii všetky možnosti na mieste spolujazdca. Rovnakou myšlienkou môžeme do súčinu pripojiť aj zadné sedadlá a dostaneme finálny výsledok $2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 12$.

Ľahké 7:

Na tanečnej súťaži bol šikovný reprezentant čmeliak Bzučo a za každú disciplínu získal 10, 8 alebo 5 bodov, pričom 10 bodov získal toľkokrát, koľkokrát získal 8 bodov. Nakoniec súťaž vyhral a dostal za ňu dokopy 99 bodov. Koľko bolo tanečných disciplín?

Výsledok: 15

Riešenie:

Vieme, že za disciplínu dostal rovnaký počet ráz 8 bodov a rovnaký počet ráz 10 bodov. Teda môžeme povedať, že získal niekoľkokrát 18 bodov a niekoľkokrát 5 bodov. Teraz nám treba zistiť, koľkokrát získal 18 a koľkokrát získal 5, aby súčet jeho bodov bol na konci 99. Môžeme skúsiť takú možnosť, že vždy získal iba 18 bodov, ale to nám dá najväčší súčet menší ako 99: $18 \cdot 5 = 90$. Teraz skúsime pridať niekoľko disciplín za ktoré dostal 5 bodov tak, aby neprekročil 99 bodov. A to je presne jedna disciplína: $90 + 5 = 95$. Teraz skúsme odobrať jednu disciplínu, za ktorú získal 18 bodov a zase dodať disciplíny za 5, kým súčet bodov neprekročí 99. Teraz nám vyjde $18 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = 97$. Tak znova odoberieme 18 a budeme pripočítavať 5. Teraz nám už ale vyjde súčet $18 \cdot 3 + 5 \cdot 9 = 99$.

Teraz musíme spočítať, koľko rôznych disciplín bolo. Vieme, že bolo 9 disciplín, za ktoré získal 5 bodov a 3 disciplíny, za ktoré získal 18 bodov. Lenže nemohol dostať 18, ale len 10 a 8. Teda každá z disciplín, za ktoré dostal 18 bodov sa počítajú ako dve disciplíny, jedna za 8 bodov a druhá za 10 bodov. Takže nakoniec bolo 9 disciplín, za ktoré získal 5 bodov, 3 disciplíny, za ktoré dostal 8 bodov a 3 disciplíny, za ktoré dostal 10 bodov. Dokopy bolo $9 + 3 + 3 = 15$ disciplín.

Ľahké 8:

Trojičky včeličky Meduška, Pylka a Žltinka zbierali jahody v lese. Meduška, ktorá ich nazbierala najviac, nazbierala 3-krát viac jahôd ako Pylka, ktorá ich nazbierala najmenej. Spolu všetky tri nazbierali 30 jahôd. Koľko jahôd nazbierala Žltinka, ak každá zo sestier nazbierala iný počet jahôd?

Výsledok: 10

Riešenie:

Zo zadania vieme, že Meduška nazbierala 3-krát viac jahôd ako Pylka. Pozrime sa koľko jahôd nazbierali dokopy. Keby sme tento počet jahôd rozdelili na štyri časti, tak tri časti by dostala Meduška a jednu Pylka. To znamená, tento počet jahôd musí byť deliteľný 4, a zároveň menší ako 30, pretože to je koľko mali jahôd všetky tri dokopy.

Pozrime sa na to, aké počty jahôd môžu mať dokopy Pylka s Meduškou. Keby mali 4, 8 alebo 12 jahôd, tak Žltinka by potom mala tie zvyšné, teda $30 - 4 = 24$, $30 - 8 = 22$ alebo $30 - 12 = 18$ jahôd. Čo je viac jahôd ako polovica, teda určite by Žltinka mala najviac jahôd.To sa ale nemohlo stať, pretože najviac jahôd mala podľa zadania Meduška, nie Žltinka.

Pozrime sa teda ďalej na ďalšiu možnosť. Keby mali dokopy 16 jahôd, tak Pylka by mala $16 : 4 = 4$ jahody. Meduška by mala $4 \cdot 3 = 12$ jahôd. Žltinka by mala $30 - 16 = 14$ jahôd. V tejto možnosti má Žltinka viac jahôd ako Meduška, takže táto možnosť tiež nemohla nastať.

Keby mali dokopy 20 jahôd, žltinka by mala $30 - 20 = 10$ jahôd. Pylka by mala $20 : 4 = 5$ jahôd. Meduška by teda mala $5 \cdot 3 = 15$ jahôd. Táto možnosť vychádza, Pylka by nazbierala 10 jahôd.

Keby mali dokopy 24 jahôd, tak Žltinka by mala $24 : 4 = 6$ jahôd. Pylka by mala $30 - 24 = 6$ jahôd. Podľa zadania dve včielky nemôžu mať rovnaký počet jahôd, teda táto možnosť byť nemohla. Keby mali dokopy 28 jahôd, tak Žltinka by mala $28 : 4 = 7$. Pylka by mala $30 - 28 = 2$ jahôd, čo je menej ako Žltinka, a to mať nemôže.

Len jedna možnosť nám vychádzala, teda Pylka musela nazbierať 10 jahôd.

Ľahké 9:

Čmeliaci si urobili tanečný kruh okolo úľa a sú po poradí očíslovaní začínajúc číslom 1. Čmeliak s číslom 3 stojí presne oproti čmeliakovi s číslom 17. Koľko čmeliakov tancuje dokopy v kruhu?

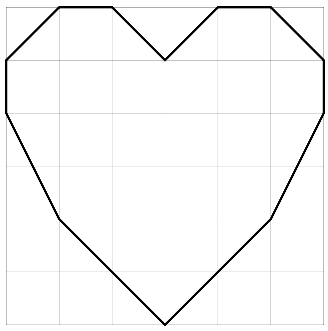
Výsledok: 28

Riešenie:

Keďže v kruhu oproti číslu 3 stojí číslo 17, tak to znamená že v smere poradia číslovania je medzi nimi polovica, teda 13 čísel. Keďže polovica čísel je 13, tak všetkých čísel, je dvakrát viac, teda 26, ale ešte musíme prirátať čísla 3 a 17, ktoré sme zatiaľ neuvažovali. Teda spolu ich je 26 + 2 = 28.

Ľahké 10:

Aký je obsah Bzučovho plástu na obrázku, ak má jeden štvorček stranu dĺžky 1?



Výsledok: 24

Riešenie:

Obsah štvorca vypočítame tak, že vynásobíme dve jeho strany. V tomto prípade bude obsah jedného štvorčeka 1 · 1 = 1. V Bzučovom pláste je takýchto celých štvorčekov 18, teda ich obsah bude spolu 18 · 1 = 18. Môžeme vidieť, že tam máme aj polovice štvorčekov. Keď dáme dokopy dve polovice štvorčekov, vznikne nám jeden celý štvorček s obsahom 1. V Bzučovom pláste je takýchto polovičných štvorčekov 8. Ich obsah bude teda 8 : 2 = 4. Potom tam ešte máme dve polovice z obdĺžnikov 2 × 1. Keď tieto dve polovice dáme dokopy, vznikne nám jeden celý obdĺžnik 2 × 1 s obsahom 2 · 1 = 2. Takže obsah celého Bzučovho plástu je 18 + 4 + 2 = 24.

Ľahké 11:

Čmeliak Bzučo potrebuje na zapojenie osvetlenia na oslavu 40 voľných elektrických zásuviek. Zatiaľ však má iba jednu elektrickú zásuvku a niekoľko predlžovačiek so štyrmi výstupmi. Koľko najmenej predlžovačiek potrebuje, aby zapojil všetkých 40 osvetlení?

Výsledok: 13

Riešenie:

Každá predlžovačka pridá 4 výstupy, ale do jedného sa zapojí, takže celkový počet výstupov stúpne o 3. Na začiatku má 1 a chce mať 40 výstupov, teda potrebuje 39 nových výstupov. To znamená, že potrebuje 3 výstupy pridať ešte 39 : 3 = 13-krát.

Ľahké 12:

Rebrík čmeliaka Bzuča do jeho poschodovej postele má 10 schodíkov. Vzdialenosť medzi dvoma schodíkmi je 20 cm. Aká je vzdialenosť medzi prvým a posledným schodíkom?

Výsledok: 180 cm

Riešenie:

Rebrík má 10 schodíkov, čo znamená, že medzi prvým a posledným schodíkom sa nachádza 9 medzier. Každá medzera medzi dvoma schodíkmi má vzdialenosť 20 cm, takže vzdialenosť medzi prvým a posledným schodíkom je $9 \cdot 20 = 180$ cm.

Ľahké 13:

Divadlo, ktoré navštevuje čmeliak Bzučo, má v prvom rade 24 a v poslednom rade 50 sedadiel, pričom každý nasledujúci rad má o 2 sedadlá viac ako predošlý. Koľko sedadiel je v divadle?

Výsledok: 518

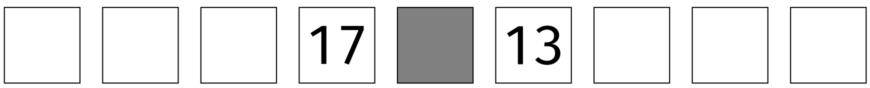
Riešenie:

Napíšeme si počet sedadiel v každom rade: 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50 a následne ich sčítame. Pre zjednodušenie počítania môžeme sčítavať prvé s posledným, potom druhé s predposledným atď. Takto dostaneme vždy rovnaký súčet: $24+50 = 74$; $26 + 48 = 74$; $28 + 46 = 74$; $30 + 44 = 74$; $32 + 42 = 74$; $34 + 40 = 74$; $36 + 38 = 74$. Vyšlo nám 7 rovnakých súčtov, takže pre zistenie celkového počtu sedadiel v divadle už len stačí vynásobiť $7 \cdot 74 = 518$.

Ľahké 14:

Každé z čísel 2; 5; 6; 11; 12; 13; 17; 27 a 30 je zapísané práve do jedného zo štvorčekov na obrázku. Čísla 13 a 17 už sú vpísané. Čmeliak Bzučo vypočítal priemery čísel v prvých troch, stredných troch a posledných troch štvorčekoch. Zistil, že sú všetky rovnaké. Určte, ktoré číslo je umiestnené v sivom štvorčeku.

Pozn.: priemer je hodnota, ktorú dostaneme, keď sčítame nejaké hodnoty a výsledok vydelíme ich počtom.



Výsledok: 11

Riešenie:

Všimnime si, že súčet čísel v každej trojici je rovnaký, pretože priemer čísel v každej trojici je rovnaký. To znamená, že súčet čísel v každej trojici je v skutočnosti tretinou súčtu všetkých čísel (pretože máme tri trojice). Súčet všetkých čísel je $2+5+6+11+12+13+17+27+30 = 123$, čiže súčet v jednotlivých trojiciach je $123 : 3 = 41$. Z toho vyplýva, že naše chýbajúce číslo vieme získať odrátaním známych čísel, s ktorými je v trojici od súčtu trojice, čiže $41 - 13 - 17 = 11$.

Ľahké 15:

Na stole ležalo deväť číslovaných kariet s číslami od 1 do 9. Trojičky včeličky Meduška, Pylka a Žltinka si vzali každá po dve karty. Tri karty ostali na stole. Ak je súčet čísel kariet každej z nich párny, aký je najmenší možný súčet čísel kariet, ktoré zostali na stole?

Výsledok: 7

Riešenie:

Aby dve čísla mali párny súčet, musia byť obe čísla buď párne, alebo obe nepárne. Aby karty na stole mali čo najmenší súčet, trojičky si museli zobrať čo najväčšie čísla.

Najväčšie štyri čísla kariet sú 9, 8, 7 a 6, dve párne a dve nepárne, teda jedna včelička si vzala 9 a 7, druhá 8 a 6. Ak by si tretia včelička zobrala zo zvyšných kariet dve najväčšie párne, teda 4 a 2, na stole by ostal súčet 1 + 3 + 5 = 9. Ak by si zobrala dve najväčšie nepárne, teda 3 a 5, súčet na stole by bol 1 + 2 + 4 = 7, čo je najmenší možný súčet.

Ľahké 16:

V študentskom úli žijú včely a čmeliaky. Na každom poschodí býva aspoň jeden študent. Žiadne dva čmeliaky a žiadne dve včely nebývajú na rovnakom poschodí. Žiadni dvaja študenti narodení v rovnakom mesiaci nebývajú na rôznych poschodiach. Najviac koľko študentov môže v tomto úli bývať?

Výsledok: 24

Riešenie:

Keďže na jednom poschodí nemôžu bývať dva čmeliaky ani dve včely, môžu tam bývať najviac dvaja študenti: jeden čmeliak a jedna včela. Keďže všetci študenti narodení v rovnakom mesiaci bývajú na rovnakom poschodí, môže mať hotel najviac toľko poschodí, koľko je mesiacov, teda 12. Najviac 12 poschodí po najviac dvoch študentoch znamená, že v celom úli žije najviac 12 · 2 = 24 študentov.

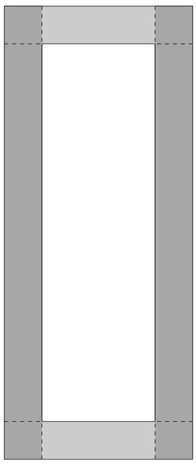
Ľahké 17:

Bzučo má doma bazén plný medu, ktorý je tvaru obdĺžnika s dĺžkou 20 m a je zo všetkých štyroch strán obklopený chodníkom širokým 2 m. Obsah chodníka je rovnaký ako obsah podlahy v bazéne. Aká je šírka bazéna v metroch?

Výsledok: 6

Riešenie:

Nakreslíme si Bzučov bazén:



Obsah tmavšie vyfarbených častí vieme vypočítať. Ide totiž o dva rovnaké obdĺžniky, ktoré majú šírku 2 m a dĺžku 24 m (20 m je dĺžka bazéna

---

Ľahké 18:

Slimák Dunčo doniesol Bzučovi 9 palíc s celočíselnými dĺžkami od 1 po 9 (každú práve raz). Aký je rozdiel obvodov najväčšieho a najmenšieho trojuholníka skladajúceho sa z práve troch palíc, ktorý vie z týchto palíc vytvoriť?

Výsledok: 15

Riešenie:

Najväčší možný trojuholník bude zložený z troch najdlhších palíc, teda jeho obvod bude $9 + 8 + 7 = 24$. Najmenší trojuholník ale nemôže byť tvorený troma najkratšími palicami, pretože podľa trojuholníkovej nerovnosti musia dve kratšie strany trojuholníka byť v súčte dlhšie ako jeho najdlhšia strana, čo pri paliciach 1, 2 a 3 nesedí, keďže $1+2 = 3$. Pri každej trojici s 1 by sme mali tento problém, pretože jednotlivé palice majú rozdiel aspoň 1. Preto namiesto palice s dĺžkou 1 použijeme ďalšiu najkratšiu možnú palicu, čo je 4 . Obvod takého trojuholníka bude $2 + 3 + 4 = 9$. Rozdiel obvodov je teda $24 - 9 = 15$.

Ľahké 19:

Bzučo má dvoje hodiny. Ráno o ôsmej nastavil na oboch rovnaký čas. Keď sa na ne o deviatej pozrel, zistil, že jedny dve minúty meškajú a druhé idú o minútu dopredu. Keď sa na ne pozrel znova, časy na nich sa líšili o hodinu. Kedy najskôr sa na ne znova pozrel?

Výsledok: 4:00 v ďalší deň

Riešenie:

Po uplynutí jednej hodiny sa časy na oboch hodinách líšili o $2 + 1 = 3$ minúty, keďže prvé hodiny išli o dve minúty neskôr a druhé o minútu skôr. Rozdiel medzi časmi na oboch hodinách sa teda každú hodinu zvýši o 3 minúty. Keď sa Bzučo pozrie na hodiny znovu, tak sa ich časy majú líšiť o 1 hodinu, čiže 60 minút. Keďže sa hľadaný rozdiel navýši o 3 minúty za každú hodinu, tak o 60 minút sa navýši za $60 : 3 = 20$ hodín.

Na začiatku bolo 8:00. Bzučo sa pozrie na hodiny o 20 hodín neskôr, čo by bolo o 28:00. Deň má 24 hodín, takže po 16 hodinách od 8:00 sa na hodinách objaví čas 0:00, čo je už ďalší deň. Následne ostáva k času 0:00 pripočítať zvyšné 4 hodiny. A teda Bzučo sa znovu pozrie na hodiny o 4:00 ďalšieho dňa.

Ľahké 20:

Meduška organizuje párty pre svojich bzučiacich kamarátov a chce na ňu kúpiť presne 91 lentiliek. Lentilky predávajú v baleniach po 4, 7 a 18 kusov. Koľko najmenej balení musí Meduška kúpiť, ak nechce kúpiť ani jednu lentilku navyše?

Výsledok: 8

Riešenie:

Keďže máme zistiť, koľko najmenej balení lentiliek Meduška kúpila, predpokladajme, že kúpila čo najviac 18-kusových balení, lebo obsahujú najviac lentiliek.

Týchto balení Meduška mohla nakúpiť najviac 4, lebo $4 \cdot 18 = 72$. Keby kúpila 5 balení, kúpila by $5 \cdot 18 = 90$ lentiliek, no Meduška nechce kúpiť ani jednu lentilku navyše a lentilky môže kúpiť len v baleniach po viacerých lentilkách.

Keby kúpila menej 18-kusových balení, musela by to vynahradiť viacerými menšími baleniami, čo však ide oproti zadaniu, kde sa snažíme kúpiť čo najmenej balení.

Takže má nakúpených 72 lentiliek, takže ešte potrebuje kúpiť $91 - 72 = 19$ lentiliek. Aby opäť nakúpila čo najmenej balení, musí kúpiť čo najviac 7-kusových balení. Tie by mohla kúpiť až dve, takže by kúpila 14 lentiliek. Na kúpenie by jej potom ostalo ešte $19 - 14 = 5$ lentiliek. 5-kusové balenie ale v obchode nie je, takže by opäť musela kúpiť lentilky navyše. Preto môže kúpiť len jedno balenie so 7 lentilkami.

Ostane jej teda 19 - 7 = 12 lentiliek, ktoré môže kúpiť v troch 4-lentilkových baleniach. Meduška teda kúpila štyri 18-kusové balenia, jedno 7-kusové balenie a tri 4-kusové balenia, čo je spolu 4 + 1 + 3 = 8 balení.

Ľahké 21:

Na lúke predávajú nektár po jednej fľaši a med po troch fľašiach. Súčin ceny nektáru a trojbalenia medu je 351€. Súčet ceny fľaše nektáru a jednej fľaše medu je 22€. Nektár je drahší ako jedna fľaša medu. Koľko fliaš medu si môže Bzučo kúpiť, keď má iba 145€? Fľaše medu sa na lúke predávajú iba v baleniach po troch.

Výsledok: 15

Riešenie:

Súčin ceny jednej fľaše medu a nektáru je 351 : 3 = 117€. Hľadáme teda dve čísla, ktorých súčet je 22 a ich súčin je 117. Číslo 117 sa dá získať ako 1 · 117, 3 · 39 a 9 · 13. Súčet 22 majú len 9 + 13. Med je lacnejší, teda stojí 9€, a trojbalenie stojí 9 · 3 = 27€. Za 145€ si teda vie kúpiť 145€ : 27 = 5€ trojbalení medu, čo je 15 fliaš.

Ľahké 22:

Fľaša medu a guľôčka peľu vážia toľko, koľko trubička vosku. Fľaša medu váži toľko, koľko guľôčka peľu a dva poháre nektáru. Dve trubičky vosku vážia toľko, koľko šesť pohárov nektáru. Koľko guľôčok peľu váži toľko, koľko fľaša medu?

Výsledok: 5

Riešenie:

Fľašu medu budeme označovať F, guľôčku peľu G, trubičku vosku T a pohár nektáru P.
$2T$ vážia toľko, koľko $6P$, preto T váži toľko, koľko $3P$. Okrem toho vieme aj to, že T váži rovnako ako F a G dokopy. Z toho teda vieme povedať, že $3P$ vážia toľko, koľko F a G dokopy.
Keďže vieme, že F váži toľko, koľko G a $2P$, vieme povedať, že $3P$ vážia toľko, koľko G, $2P$ a ešte jedna G. Dokopy teda $3P$ vážia toľko, koľko $2P$ a $2G$. Z toho vieme, že P váži rovnako ako $2G$.
Keďže F váži toľko, koľko G a $2P$, a zároveň P váži rovnako ako $2G$, vieme povedať, že F váži toľko koľko $1 + 2 \cdot 2 = 5G$.

Ľahké 23:

Bzučo a kamaráti z úľa si v reštaurácii objednali dve porcie halušiek, tri buchty na pare a štyri langoše. Zaplatili 53€. Dunčo a Rex si kúpili päť porcií halušiek, šesť buchiet a sedem langošov. Platili 107€. O koľko viac stojí porcia halušiek ako langoš?

Výsledok: 1€

Riešenie:

Povedzme, že Bzučo a kamaráti z úľa si objednajú dvojnásobok toho, čo si objednali. Objednajú si teda: 4 porcie halušiek, 6 buchiet a 8 langošov. Keďže si objednali dvakrát toľko, musia aj zaplatiť dvakrát tak veľa. Zaplatia teda: 53 · 2 = 106€.
Teraz si porovnajme tieto dve objednávky. Obe tieto objednávky si objednali 6 porcií buchiet. To znamená, že sa na nich nemusíme pozerať, pretože obidvaja za nich zaplatili rovnako veľa.
Všimnime si, že Dunčo s Rexom si objednali o porciu halušiek viac, ale o jeden langoš menej. Rozdiel v cene medzi týmito dvomi objednávkami je len 1€ (107 - 106 = 1). To

znamená, že rozdiel v cene je presne medzi jednou porciou halušiek, o ktorú mali Dunčo s Rexom viac, a langošom, ktorý mali naviac Bzučo s kamarátmi. Keďže Dunčo s Rexom zaplatili o jedno euro viac, tak halušky, ktoré mali oproti Bzučovi naviac, musia byť práve o jedno euro drahšie.
Jedna porcia halušiek stojí o 1€ viac ako langoš.

Ľahké 24:

Aké najväčšie číslo vie čmeliak Bzučo dostať vyškrtnutím niekoľkých cifier z čísla 6543265432 tak, že nové číslo bude mať ciferný súčet 20?

Výsledok: 643232

Riešenie:

Ak spočítame súčet cifier čísla 6543265432, tak dostaneme spolu 40. My však chceme, aby nové číslo malo súčet cifier 20. To znamená, že cifry, ktoré odstránime, musia mať spolu súčet 40 - 20 = 20. Zároveň chceme, aby výsledné číslo bolo čo najväčšie. Číslo bude tým väčšie, čím viac cifier mu ostane. Preto sa snažíme vyškrtnúť čo najmenej cifier tak, aby ich súčet bol 20.

Skúsme najprv zistiť, či by sme mohli vyškrtnúť iba tri cifry. Pozrieme sa na tri najväčšie cifry v čísle – 6, 6 a 5. Keď ich spočítame, dostaneme 6 + 6 + 5 = 17. To ale nestačí, pretože potrebujeme, aby ich súčet bol 20. Štyri cifry už ale budú stačiť, pretože súčet štyroch najväčších cifier je 6 + 6 + 5 + 5 = 22.

Skúsme nájsť štyri cifry na vyškrtnutie, ktoré budú dávať súčet 20. Všimnime si, že na to, aby sme dosiahli súčet 20, musíme vyškrtnúť aspoň jednu cifru 6. Inak by bol maximálny súčet vyškrtnutých cifier 5 + 5 + 4 + 4 = 18. Druhú cifru 6 si chceme v čísle nechať, pretože chceme, aby bola prvá cifra čísla čo najväčšia. Potom však musíme vyškrtnúť obe cifry 5, inak by bol maximálny súčet vyškrtnutých cifier 6 + 4 + 4 + 3 = 17, prípadne s jednou vyškrtnutou cifrou 5 stále iba 6 + 5 + 4 + 4 = 19. Dokopy teda už musíme vyškrtnúť cifry 6, 5 a 5. Do súčtu 20 nám ostáva 20 - 6 - 5 - 5 = 4.

Z čísla 6543265432 teda vyškrtneme druhú cifru 6, obe cifry 5 a druhú cifru 4. V takom prípade dostaneme najväčšie možné výsledné číslo 643232.

Ľahké 25:

Modré kvety kvitnú najprv 2 roky po sebe, potom majú 3 roky pauzu a takto dookola. Žlté kvety kvitnú najprv 1 rok, potom majú 10 rokov pauzu a takto dookola. V najbližších 100 rokoch, koľko je takých rokov, že budú kvitnúť naraz?

Výsledok: 4

Riešenie:

Pre žlté kvety si môžeme vypísať, v ktorých rokoch budú kvitnúť, keďže tých nie je až tak veľa v najbližších 100 rokoch. Budú kvitnúť v týchto rokoch: 1, 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 100.

Pre modré kvety sa cyklus kvitnutia a nekvitnutia opakuje každých 2 + 3 = 5 rokov. Keďže prvý rok kvitnú, tak budú kvitnúť aj 5 rokov na to - teda šiesty rok. Takisto budú kvitnúť aj 5 rokov na to - teda jedenásty rok. Celkovo teda budú kvitnúť každý rok, ktorý dostaneme tak, že k číslu 1 pripočítame násobok čísla 5. Môžeme si všimnúť, že ide o roky, ktoré končia číslicou 1 alebo 6.

Takisto vieme, že modré kvety kvitnú aj druhý rok. Podobným spôsobom teda dôjdeme k tomu, že budú kvitnúť každý rok, ktorý končí číslicou 2 alebo 7.

Modré kvety budú teda kvitnúť v rokoch, ktoré končia cifrou 1, 2, 5 alebo 7.

Z rokov, ktoré sme si vypísali pri žltých kvetoch, spĺňajú túto podmienku 4 roky - 1, 2, 56, 67. V týchto štyroch rokoch budú teda modré a žlté kvety kvitnúť naraz.

Ľahké 26:

Bzučo má matematický automat, ktorý vie vykonávať iba dve operácie s číslami: buď pripočítať číslo 1, alebo dané číslo zdvojnásobiť. Na začiatku vložil do stroja číslo 0. Aký najmenší počet operácií musel stroj previesť, ak z neho za okamih vypadlo číslo 117?

Výsledok: 11

Riešenie:

Ak chceme urobiť čo najmenej operácií, chceme čo najviackrát využiť zdvojnásobenie, lebo nám „rýchlejšie" zväčší číslo, ako keby sme iba pričítali 1. Ustanovíme si pravidlo, že ak máme párne číslo, určite sme ho získali zdvojnásobením, aby sme použili čo najmenej krokov. Najprv sa pozrieme na výsledné číslo a úlohu vyriešime odzadu:

- 117 nevieme získať ako výsledok zdvojnásobenia, keďže je nepárne a začíname s celým číslom. Takže posledný krok musel byť pripočítanie čísla 1, z čoho vieme dorátať predposledný výsledok, a to 117 - 1 = 116.
- 116 vieme získať ako výsledok zdvojnásobenia, je párne. Aby sme dostali 116, museli sme zdvojnásobiť číslo 116 : 2 = 58.
- 58 je tretí výsledok od konca. Je to párne číslo, teda pred ním podľa nášho pravidla bolo číslo 58 : 2 = 29.
- 29 je nepárne, teda sme museli pričítať 1 a predchádzajúce číslo z automatu bolo 29 - 1 = 28.
- 28 je párne, teda číslo pred ním bolo 28 : 2 = 14.
- 14 je párne, teda číslo pred ním bolo 14 : 2 = 7.
- 7 je nepárne, teda sme museli pričítať 1, takže číslo pred ním bolo 7 - 1 = 6.
- 6 je párne, teda číslo pred ním bolo 6 : 2 = 3.
- 3 je nepárne, teda sme museli pričítať 1, takže číslo pred ním bolo 3 - 1 = 2.
- 2 sme mohli získať buď zdvojnásobením 1, alebo prirátaním 1 k číslu 1, teda nezáleží na tom, ktorá operácia to bola, predošlé číslo bolo 1.
- 1 je nepárne, takže číslo pred ním bolo 1 - 1 = 0, čo je cifra, s ktorou automat začínal a už ďalej nemusíme používať operácie.

Rad čísel, ktoré automat získal, v správnom poradí vyzeral takto: 1, 2, 3, 6, 7, 14, 28, 29, 58, 116, 117, pričom sme využili automat 11-krát.

Ľahké 27:

Čmeliak Dlháň má 2026 prúžkov, na každom prúžku má napísanú cifru tak, že každé dva susediace prúžky tvoria dvojciferné číslo deliteľné číslom 13. Akú cifru má Dlháň na prvom prúžku, ak na poslednom má cifru 2?

Výsledok: 2

Riešenie:

Na začiatok si vypíšeme všetky dvojciferné násobky 13 a pozrieme sa na ich cifry: 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91.

Ak posledný prúžok má cifru 2, prúžok pred ním musí určite mať cifru 5, lebo jedine 52 je taký dvojciferný násobok 13, ktorý končí cifrou 2. Podobne postupujeme aj ďalej a zistíme, že pred prúžkom s cifrou 5 môže byť jedine prúžok s cifrou 6. Pred týmto prúžkom musí byť prúžok s cifrou 2. Všimnime si, že sme sa dostali opäť na začiatok, teda postupnosť cifier 6, 5, 2 na prúžkoch sa opakuje.

Prúžkov je 2026, teda táto trojica sa nám opakuje $2026 : 3 = 675$ zv.1. Ostal ešte jeden prúžok, prvý, keďže sme postupovali od konca, za ktorým je prúžok s číslom 6, preto na prvom prúžku bude cifra 2.

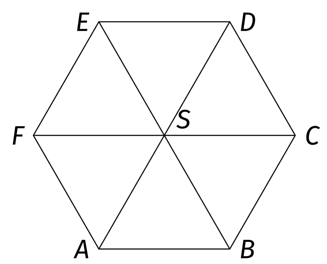
Ľahké 28:

Vchod do úľa má tvar pravidelného šesťuholníka $ABCDEF$. Aká je veľkosť uhla ACF?

Výsledok: 30

Riešenie:

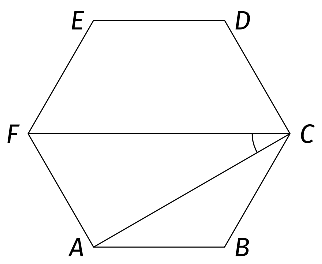
Na vyriešenie tejto úlohy potrebujeme vedieť, akú veľkosť má vnútorný uhol pravidelného šesťuholníka. Začneme tým, že si rozdelíme šesťuholník na 6 trojuholníkov ako na obrázku. Vieme, že každý trojuholník má súčet vnútorných uhlov 180°, takže vo všetkých šiestich trojuholníkoch máme dokopy $6 \cdot 180° = 1080°$. Ak od toho odčítame plný uhol (okolo bodu S) v strede šesťuholníka $1080° - 360° = 720°$, dostaneme súčet vnútorných uhlov v šesťuholníku. Keďže v pravidelnom šesťuholníku má každý vnútorný uhol rovnakú veľkosť, tak veľkosť jedného vnútorného uhla bude $720° : 6 = 120°$.



Teraz si všimnime ,že úsečka FC delí uhol EFA na polovicu, teda $|\sphericalangle CFA| = |\sphericalangle EFA| : 2 = 120° : 2 = 60°$.

Pozrime sa na trojuholník ABC, keďže AB a BCsú strany pravidelného šesťuholníka, tak je rovnoramenný, a zároveň $|\sphericalangle ABC| = 120°$, teda súčet uhlov CAB a ACB je $180° - 120° = 60°$, keďže trojuholník ABC je rovnoramenný, tak $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle ACB|$, a teda $|\sphericalangle CAB| = 60° : 2 = 30°$.

Z toho si vieme dopočítať veľkosť uhla FAC, lebo $|\sphericalangle FAC| = |\sphericalangle FAB| - |\sphericalangle CAB| = 120° - 30° = 90°$. Súčet veľkostí vnútorných uhlov v trojuholníku je 180°, teda aj súčet $|\sphericalangle FAC| + |\sphericalangle CFA| + |\sphericalangle ACF| = 90° + 60° + |\sphericalangle ACF| = 180°$, z čoho vyplýva, že $|\sphericalangle ACF| = 180° - 150° = 30°$.



Poznámka: značenie |∢ABC| znamená veľkosť uhla ABC

Ľahké 29:

Aký najväčší ciferný súčet môže mať číslo *SETRI*, ak platí sčítanie na obrázku? Rovnaké písmená symbolizujú rovnaké cifry, rôzne písmená rôzne cifry.

$$\begin{array}{cccc} & T & R & I \\ & T & R & I \\ \hline S & E & S & T \end{array}$$

Výsledok: 30

Riešenie:

Najprv sa pozrieme na to, aká cifra môže byť písmenko *S*. Výsledné číslo SEST je štvorciferné, avšak sčítavame iba dve trojciferné čísla, preto *S* musí byť 1, pretože keď sčítame dve trojciferné čísla, nikdy nám nevyjde číslo 2000 alebo väčšie.

Súčet *R* + *R* musí na mieste jednotiek mať 1, čo ale nejde len tak, pretože súčet dvoch rovnakých čísel bude vždy párny a žiadne párne číslo nemá na pozícii jednotiek 1. Preto musí súčet *I* + *I* dávať dvojciferné číslo, z ktorého si po prvom sčítaní „prenesieme" 1, a teda *R* + *R* musí mať na mieste jednotiek 0, aby *S* bolo 1. To docielime tak, že *R* bude 0 alebo 5, pretože 5 + 5 je 10, čo vyhovuje. Chceme najväčší ciferný súčet, a jediné ovplyvnené písmeno je *E* tak za *R* najprv skúseime dosadiť 5.

Aby bol výsledný ciferný súčet čo najväčší, tak optimálne chceme, aby zvyšné tri cifry *I***,** *E***,** *T* boli 7, 8, 9 v nejakom poradí. Všimnime si, že *T* bude určite párne, keďže súčet dvoch rovnakých čísel *I* bude vždy párny a najvyššia párna cifra je 8. Súčet *I*+*I* bude dvojciferný, čo sme už zistili skôr v riešení, takže bude 18 a *I* tak bude 9. Následne nám *E* vyjde ako cifra 7, keďže *T* + *T* = 8 + 8 = 16 a pripočítame „prenesenú" 1 z *R* + *R*.

Teraz jasne vidíme, že menením *R* na 0 by sme ciferný súčet iba zmenšili.

Overíme si, či nám sčítanie vychádza: 859 + 859 = 1718.

Nakoniec sčítame cifry v slove SETRI, teda 1 + 7 + 8 + 5 + 9 = 30.

Ľahké 30:

Čmeliak Bzučo každé ráno odlieta z úľa o 10:35 k jazeru. Od jazera odlieta Meduška smerom k Bžučovmu úľu o 10:50. Po ceste majú 20 kvietkov, na ktorých obaja stoja. Kvietky sú od seba vzdialené 5 minút letu. V aký čas sa stretnú?

Výsledok: 11:35

Riešenie:

Bzučo letí od 10:35. Meduška vyletí až o 10:50, čiže Bzučo má 15 minút náskok. Keďže dolet ku kvietku trvá 5 min, o 10:50 bude Bzučo na 3. kvietku. Vtedy vyletí Meduška rovnakou rýchlosťou, a teda by sa mali stretnúť v strede ostávajúcej dráhy. Ostáva 17 kvietkov, ktoré delia dráhu na 18 medzier medzi kvietkom, kde je Bzučo, a jazerom, kde je Meduška. Aby sa obaja dostali do stredu, treba im prejsť $18 : 2 = 9$ medzier.
Preletieť medzeru zo zadania trvá 5 minút, teda budú dokopy letieť $9 \cdot 5 = 45$ minút, kým sa nestretnú. Prirátame tých 45 minút ku 10:50, lebo Bzučov náskok sme už odrátali. Takže sa stretnú o 11:35.

Stredné

Stredné 1:

Čmeliak Bzučo má vrecúško s červenými, žltými a modrými kvietkami, pričom z každého druhu má aspoň jeden. Keď z vrecúška po slepiačky vyberie 5 kvietkov, je isté, že vytiahne aspoň 2 červené a aspoň 3 kvietky jednej farby. Koľko je vo vrecúšku modrých kvietkov?

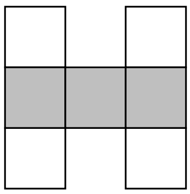
Výsledok: 1

Riešenie:

Keďže je isté, že vytiahne aspoň dva červené kvietky, tak vo vrecúšku môžu byť najviac 3 nečervené kvietky, lebo inak by mohol vo vybranej pätici mať 4 nečervené kvietky, teda iba 1 červený. Tieto tri kvietky nemôžu byť rovnakej farby, lebo potom by sme nemali aspoň jeden z každej farby. Preto tri vytiahnuté kvietky rovnakej farby musia byť červené. Teda vo vrecúšku môžu byť najviac 2 nečervené kvietky, lebo inak by sme mohli vytiahnuť 3 nečervené kvietky a teda iba 2 červené, čiže by sme nevytiahli 3 kvietky rovnakej farby. Keďže z každej farby musí byť vo vrecúšku aspoň jeden kvietok, tak vo vrecúšku je jeden modrý a jeden žltý.

Stredné 2:

Čmeliak Bzučo išiel navštíviť kamarátov do susedného úľa. Na ňom bol nakreslený obrázok – v každom políčku bolo číslo od 1 do 7, pričom každé bolo použité práve raz. Všimol si, že súčet čísel v ľavom stĺpci, súčet čísel v pravom stĺpci a súčet čísel na každej uhlopriečke je rovnaký. Okrem toho bol aj súčin čísel v sivom riadku najmenší možný pri splnení predošlých podmienok. Aký bol súčet na uhlopriečke?



Výsledok: 13

Riešenie:

V obrázku máme 7 políčok a čísla 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Aby sme pochopili vzťah medzi týmito číslami a ich rozložením v mriežke, musíme si najprv vyjadriť celkovú hodnotu, s ktorou pracujeme. Keď všetky tieto čísla sčítame dohromady, zistíme, že ich celkový súčet je 28.

Taktiež vieme, že súčet v oboch stĺpcoch musí byť rovnaký. Keďže stredové číslo do stĺpcov nepatrí, ale je súčasťou celkového súčtu všetkých políčok, vieme povedať, že:

$$2 \times \text{stĺpec} + \text{stredové číslo} = 28$$

Z tohto vzťahu vyplýva, že stredové číslo musí byť párne. Je to preto, lebo „2 × hocičo" vyjde vždy ako párne číslo. Ak chceme, aby aj výsledný súčet 28 bol párny, musíme k párnemu číslu pripočítať opäť len párne číslo. Takže v strede môžu byť iba čísla 2, 4 alebo 6.

Ak by bolo v strede číslo 2, tak súčet v stĺpcoch a na uhlopriečkach by musel byť 13 (lebo 28 - 2 = 26 a 26 : 2 = 13). Keďže každá uhlopriečka prechádza stredom, kde je 2, v jej rohoch musí byť dvojica čísel, ktoré spolu dávajú 11, pretože 13 - 2 = 11. Dvojice, ktoré zo zvyšných čísel spolu dávajú 11, sú 4 a 7 a taktiež 5 a 6. Nakoniec nám zostali už len dve voľné čísla, a to 1 a 3, ktoré patria do stredov stĺpcov (sivý riadok).

Aby sme to skompletizovali, musíme tieto dvojice správne rozdeliť do stĺpcov k číslam 1 a 3, aby aj tam bol súčet 13:

- K číslu 1 v ľavom stĺpci pridáme dvojicu 7 a 5: 1 + 7 + 5 = 13.
- K číslu 3 v pravom stĺpci pridáme dvojicu 4 a 6: 3 + 4 + 6 = 13.

Keď tieto čísla správne poprehadzujeme v rohoch, zistíme, že nám sedia aj uhlopriečky: jedna bude 7 + 2 + 4 = 13 a druhá 5 + 2 + 6 = 13. Keďže súčin v sivom riadku (1 · 2 · 3) je len 6, čo je najmenšia možná hodnota, našli sme správne riešenie.

Ak by sme dali do stredu číslo 4, súčet v stĺpcoch a na uhlopriečkach by musel byť 12 (lebo 28 - 4 = 24 a 24 : 2 = 12). V tom prípade by dvojice v rohoch uhlopriečok museli spolu dávať 8, aby to sedelo so stredovou štvorkou (12 - 4 = 8). Zo zvyšných čísel však vieme poskladať dvojice 1 a 7, 2 a 6, ale po ich použití nám ostanú čísla 3 a 5. Tie by v kombinácii so stredovou štvorkou v sivom riadku vytvorili súčin 3 × 4 × 5 = 60, čo je viac než v prvom prípade.

Podobne to dopadne pri čísle 6. Vtedy by súčet musel byť 11 (28 - 6 = 22 a 22 : 2 = 11). Rohové dvojice by museli dávať spolu iba 5 (11 - 6 = 5). Máme síce dvojice 1 a 4, 2 a 3, ale po ich použití nám zostanú už len čísla 5 a 7, ktoré sú príliš veľké na to, aby sme v stĺpcoch dosiahli súčet 11.

Jediným možným riešením je stredová dvojka a celkový súčet na uhlopriečke 13.

Stredné 3:

Koľkými spôsobmi vie čmeliak Bzučo usporiadať poháre s medom očíslované ciframi 0, 3, 4, 5 a 6 do 5-ciferného čísla deliteľného číslami 4, 5 aj 6 zároveň?

Výsledok: 12

Riešenie:

Číslo má byť deliteľné 6, takže musí byť párne. Ak je párne a zároveň má byť deliteľné 5, tak sa musí končiť cifrou 0. Na to, aby bolo deliteľné 4, posledné dvojčíslie musí byť deliteľné 4. Preto máme na predposlednú cifru iba 2 možnosti, a to 4 a 6, (lebo 40 a 60 je deliteľné 4).

Ak je posledné dvojčíslie 40, tak máme tri možnosti, ktorá cifra môže byť prvá (3, 5, 6). Po tom ako vyberieme jednu z nich, máme na druhú už iba dve možnosti. Po výbere cifry na druhú pozíciu nám na tretiu ostáva jedna možnosť. To je dokopy 3 · 2 · 1 = 6 možností na to, v akom poradí je prvé trojčíslie, ak posledné je 40. Podobne to funguje aj v prípade, že posledné dvojčíslie je 60, s jediným rozdielom, a to takým, že na prvých troch pozíciách môže byť niektoré z čísel 3, 5 alebo 4. V tomto prípade teda máme ďalších 3 · 2 · 1 = 6 možností. Dokopy je to 6 + 6 = 12 možností.

Stredné 4:

Čmeliak Bzučo sa ráno zobúdza na svoj špeciálny budík s dvomi ručičkami. Ten funguje tak, že si zapamätá polohu ručičiek, pri ktorej má zvoniť, a potom zazvoní, keď ju dosiahne. O 22:00 si pred spaním nastavil budík na 7:00. Niekedy v priebehu noci sa mu budík pokazil a od toho okamihu hýbal ručičkami opačným smerom, ale rovnakou rýchlosťou. Napriek tomu zazvonil presne načas. Kedy sa pokazil?

Výsledok: 1:00

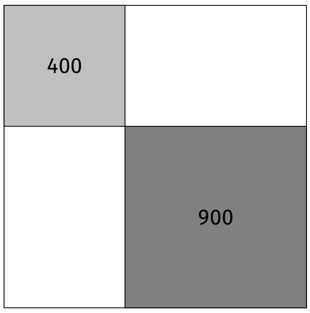
Riešenie:

Keďže budík zazvonil, tak to znamená, že ukazoval 7:00. Keďže išiel dozadu, tak to znamená, že vlastne ukazoval 19:00 predošlého dňa (nemohol ukazovať nejaký skorší čas, napr. 7:00 predošlého dňa, lebo by zazvonil skôr práve na 19:00). Keď sa pokazil, tak mu to trvalo rovnako dlho, kým dôjde do 19:00, ako by došiel do 7:00, to znamená, že od 19:00 ubehlo rovnako veľa času, ako chýba do 7:00. Preto sa musel pokaziť presne v strede medzi týmito časmi, t.j. o 1:00, pretože o takomto čase chýba do 7:00 6 hodín a od 19:00 ubehlo tiež práve 6 hodín.

Bzučov budík sa pokazil o 1:00.

Stredné 5:

V protiľahlých rohoch Bzučovej izby sú dva štvorcové koberce, jeden s plochou 400 cm^2 a druhý s plochou 900 cm^2 a dva rovnaké obdĺžnikové pásy podlahy ako na obrázku. Aká je plocha celej jeho izby?



Výsledok: 2500 cm^2

Riešenie:

Najprv chceme zistiť, akú dlhú stranu majú jednotlivé štvorce. Obsah štvorca sa počíta tak, že vynásobíme jeho dve strany. To znamená, že keď poznáme obsah štvorca, vieme zistiť aj dĺžku jeho strany. Potrebujeme nájsť dve rovnaké čísla, ktoré po vynásobení dávajú 400, a dve, ktoré dávajú 900. $20 \cdot 20 = 400\,cm^2$ a $30 \cdot 30 = 900\,cm^2$. Obdĺžnikové pásy majú teda strany dlhé 20 cm a 30 cm. Obsah obdĺžnikového pásu vypočítame tak, že vynásobíme dve jeho strany. Jeden obdĺžnikový pás podlahy má teda obsah $20 \cdot 30 = 600\,cm^2$. Takže plocha celej jeho izby je $400 + 900 + 600 + 600 = 2500\,cm^2$.

Stredné 6:

Slimák Dunčo mal hlavolam, v ktorom boli na začiatku samé nuly. Mohol robiť dva typy krokov – buď zvýšiť všetky čísla v jednom riadku o 1, alebo zvýšiť všetky čísla v jednom stĺpci o 2. Keď ho dal čmeliakovi Bzučovi, vyzeral tak, ako na obrázku. Koľko krokov urobil dokopy Dunčo?

7	1	5
9	3	7
8	2	6

Výsledok: 11

Riešenie:

Vidíme, že v prvom riadku v strede je číslo 1. To nám hovorí, že v prvom riadku sme práve raz zvýšili všetky čísla o 1. Taktiež sme v druhom stĺpci ani raz čísla nezvyšovali, ale vidíme, že tam nie sú nuly, a tým pádom sme museli zvyšovať čísla v riadku. A to konkrétne v druhom riadku trikrát a v treťom dvakrát. Takto vyzeral hlavolam po zvyšovaní čísel o 1 v riadkoch:

1	1	1
3	3	3
2	2	2

Teraz si môžeme všimnúť, že keď čísla v prvom stĺpci trikrát zvýšime o 2, čiže o 6, dostanem čísla $1 + 6 = 7$, $3 + 6 = 9$ a $2 + 6 = 8$, čo sú presne čísla, ktoré chceme. Po týchto krokoch bude tabuľka vyzerať takto:

7	1	1
9	3	3
8	2	2

Takisto keď čísla v treťom stĺpci zvýšim o 2 dvakrát, čiže o 4, dostanem čísla $1 + 4 = 5$, $3 + 4 = 7$ a $2 + 4 = 6$, čo sú tie, ktoré chceme. Teraz už tabuľka bude vyzerať tak, ako keď ju Dunčo dával Bzučovi. Dunčo teda zvyšoval o 1 šesťkrát a o 2 päťkrát, čo je spolu $6 + 5 = 11$.

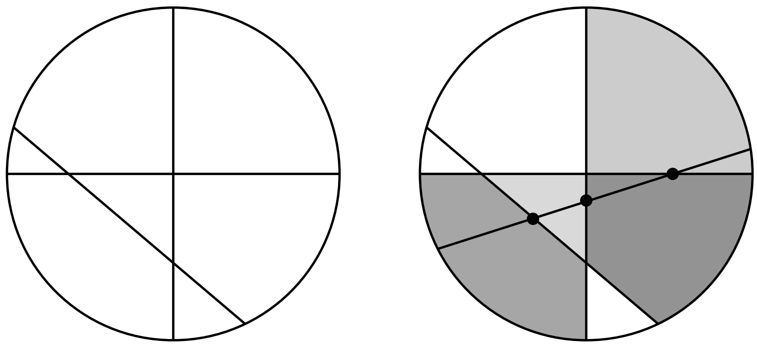
Stredné 7:

Čmeliak Bzučo na oslave nakrájal kruhovú tortu šiestimi zvislými rezmi. Koľko najviac kúskov mohol po rozrezaní mať?

Výsledok: 22

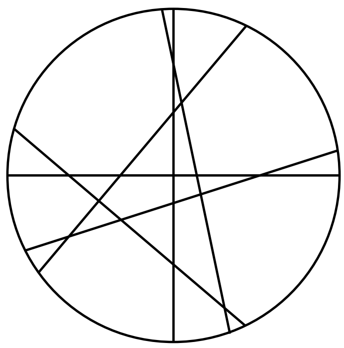
Riešenie:

Pozrime sa na to, čo sa stane, keď pridáme nový rez. Každý kúsok, cez ktorý tento rez prejde, bude rozdelený na dva, teda zakaždým pribudne jeden nový kúsok. Dokopy však tento nový rez môže prejsť len cez o jeden kúsok viac, ako sme doteraz urobili rezov. Je to preto, lebo pri prechode z jedného kúsku na druhý musíme pretnúť niektorý predchádzajúci rez, ale každý z nich vieme pretnúť najviac raz, dokopy tak môžeme prejsť z jedného kúsku na druhý toľkokrát, koľko rezov sme už urobili. To potom znamená, že dokopy môže tento nový rez pridať len toľko kúskov navyše, koľký je to rez.



Štvrtý rez môže pretnúť najviac 3 predchádzajúce rezy, teda prejde najviac štyrmi kúskami, a tak vzniknú najviac 4 nové kúsky.

Prvým rezom teda vieme tortu rozdeliť na dva kúsky. Druhý rez vie prejsť najviac cez 2 kúsky, teda sa počet kúskov môže zvýšiť najviac o 2. Tretí rez vie prejsť cez najviac 3 kúsky, ako sme ukázali v odseku vyššie, čím teda vzniknú najviac 3 nové kúsky. Rovnako štvrtým, piatym a šiestym rezom vznikne najviac 4, 5 a 6 nových kúskov. Dokopy tak vieme mať najviac 2 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 22 kúskov. Tento počet naozaj vieme docieliť, napríklad ako na obrázku:



Stredné 8:

Medzi lúkami, kde býva slimák Dunčo a slizniak Rex, chodí autobusová linka, pričom z Dunčovej lúky vyrážajú autobusy každú hodinu v 20. minúte (napr. 10:20 a 11:20) a z lúky, kde býva Rex, každú hodinu v 40. minúte (napr. 10:40 a 11:40). Cesta autobusom trvá presne 4 hodiny. Ak nastúpi Bzučo na autobus na Dunčovej lúke a bude cestovať k Rexovi, koľko autobusov idúcich od Rexovej lúky po ceste minie?

Výsledok: 8

Riešenie:

Najprv sa zamyslíme, ktorý autobus bol prvý, ktorý Bzučo uvidel počas svojej cesty. Vieme že cesta trvá 4 hodiny, takže prvý autobus, ktorý mohol Bzučo na ceste minúť, musel vyraziť od Rexa menej než 4 hodiny pred tým, ako vyrazil Bzučo. Totiž každý, ktorý vyrazil skôr, už svoju cestu skončil, teda ho Bzučo nemohol na ceste minúť.

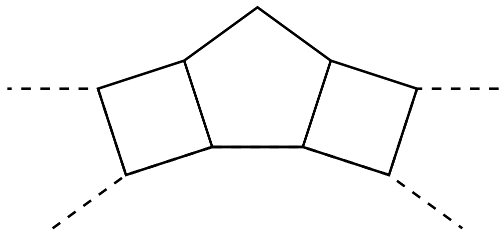
Na druhú stranu, posledný autobus, ktorý mohol minúť, musel vyraziť skôr, ako Bzučo došiel do cieľa. Takže menej ako 4 hodiny po Bzučovom odchode.

Vieme, že autobusy vyrážajú oproti sebe v rôznych časoch, raz za hodinu. Teda v 4 hodinách pred Bzučovým odchodom odišli presne 4 autobusy. Tak isto v 4 hodinách po Bzučovom odchode odišli 4 autobusy.

Všetky tie autobusy minul a vieme, že nemohol minúť žiadne iné. Teda minul dokopy 4 + 4 = 8 autobusov.

Stredné 9:

Čmeliak Bzučo lepil na striedačku do kruhu pravidelné päťuholníky a štvorce so stranou rovnakej dĺžky, ako je naznačené na obrázku. Koľko päťuholníkov potrebuje na to, aby vytvoril jeden uzavretý kruh?



Výsledok: 10

Riešenie:

Aby sme zistili, koľko päťuholníkov Bzučo potrebuje, musíme sa pozrieť na to, o koľko sa celá reťaz nálepiek v každom rohu „otáča“. Vieme, že ak má byť kruh úplne uzavretý, musí dokopy opísať presne 360°, čo je uhol celého otočenia. Každý jeden vnútorný vrchol, kde sa stretne štvorec s päťuholníkom, nám k tomuto cieľu pridá určitý kúsok.

Najprv si musíme vypočítať veľkosť vnútorného uhla v pravidelnom päťuholníku. Predstavme si, že päťuholník rozdelíme z jeho stredu na päť zhodných trojuholníkov. Keďže v strede päťuholníka je plný uhol 360°, jeden stredový uhol nášho trojuholníka vypočítame ako:

$$360° : 5 = 72°$$

Vieme, že súčet všetkých uhlov v každom trojuholníku je vždy 180°. Keď od 180° odčítame náš stredový uhol (72°), zostane nám 108°. Tento zvyšok patrí dvom rohom pri základni trojuholníka. Keďže sa však v každom vrchole päťuholníka stretávajú práve dva takéto rohy susedných trojuholníkov, veľkosť celého vnútorného uhla päťuholníka je presne týchto 108°.

Teraz sa pozrime na miesto (vrchol), kde je štvorec prilepený k päťuholníku. Štvorec má v každom rohu pravý uhol, teda 90°. Ak tieto dva tvary priložíme k sebe, ich rohy v tomto jednom spoločnom bode zaberú dokopy:

$$108° + 90° = 198°$$

Keby sme chceli, aby tvary ležali v jednej rovnej línii, museli by mať spolu v tomto bode presne 180°. Keďže však majú o niečo viac, v tomto vrchole sa naša cesta „otočí“ o rozdiel týchto hodnôt:

$$198° - 180° = 18°$$

Pretože Bzučo strieda štvorec a päťuholník, každý päťuholník má na vnútornej strane kruhu dva vrcholy. V oboch týchto vrcholoch sa päťuholník dotýka susedného štvorca. To znamená, že pri každom jednom päťuholníku sa naša cesta „otočí“ o dvakrát 18°. Každý päťuholník tak pridá do celkového otočenia kruhu dohromady:

$$18° + 18° = 36°$$

Aby sme zistili, koľko takýchto päťuholníkov potrebujeme na celých 360°, urobíme posledný výpočet:

$$360° : 36° = 10$$

Čmeliak Bzučo potrebuje na vytvorenie uzavretého kruhu presne 10 päťuholníkov.

Stredné 10:

Číslo je pre čmeliaka zaujímavé, ak spĺňa nasledujúce 2 podmienky:

- žiadna cifra sa v ňom neopakuje a
- rozdiel každých dvoch po sebe napísaných cifier v ňom je aspoň 4.

Aké je najväčšie číslo, ktoré je pre čmeliaka zaujímavé?

Výsledok: 9518406273

Riešenie:

Aby bolo číslo čo najväčšie, musí mať na prvých miestach čo najväčšie cifry a zároveň potrebuje byť čo najdlhšie - mať čo najviac cifier. Aby sme našli číslo zaujímavé pre čmeliaka, budeme sa snažiť na prvé miesta dosádzať čo najväčšie cifry a budeme sa ich snažiť dosadiť všetky.

Číslo bude teda začínať cifrou 9, lebo je najväčšia. Po cifre 9 môžu nasledovať cifry 0, 1, 2, 3, 4 alebo 5. Aby bolo číslo čo najväčšie, druhá bude cifra 5. Po cifre 5 môžu nasledovať cifry 0 alebo 1, a opäť si vyberieme tú najväčšiu z nich - cifru 1.

Po cifre 1 môžu nasledovať cifry 6, 7 alebo 8 (cifry 5 a 9 sa od cifry 1 tiež líšia o aspoň 4, avšak už sa v čísle nachádzajú a žiadna cifra sa nesmie opakovať). Najväčšia z týchto je cifra 8, preto bude na štvrtom mieste.

Po cifre 8 môžu nasledovať cifry 0, 2, 3 alebo 4 (cifra 1 už sa v čísle raz nachádza). Zase si vyberieme najväčšiu z nich - cifru 4.

Po cifre 4 môže nasledovať len cifra 0 (cifry 8 a 9 sa už v čísle nachádzajú). Z čísel, ktoré sa v čísle ešte nenachádzajú a líšia sa od 0 aspoň o 4, nám ostávajú cifry 6 alebo 7. Číslo momentálne vyzerá takto: 951840.

Po cifre 0 môžu nasledovať cifry 6 alebo 7. Ak si vyberieme cifru 7, po nej môžu nasledovať cifry 2 alebo 3. Ak si vyberieme cifru 3, po nej nemôže nasledovať žiadna iná cifra, lebo ostávajúce cifry 2 a 6 sa od cifry 3 líšia o menej ako 4. Zaujímavé číslo bude 8-ciferné a bude vyzerať takto: 95184073.

Ak by po cifre 7 nasledovala cifra 2, po nej môže nasledovať cifra 6. Potom ostáva už len cifra 3, avšak tá po cifre 6 nemôže nasledovať, lebo sa od nej nelíši aspoň o 4. Číslo bude tiež 8-ciferné a bude vyzerať takto: 95184026.

Pozrime sa, či nevieme nájsť aj viacciferné, a tak aj väčšie číslo pre čmeliaka. Ak po cifre 0 bude nasledovať cifra 6, po nej môže nasledovať len cifra 2 (cifra 3 sa od cifry 6 líši o menej ako 4). Po cifre 2 môže nasledovať len cifra 7 a po nej cifra 3. Finálne číslo bude 10-ciferné a bude vyzerať takto: 9518406273. O tomto čísle môžeme jednoznačne povedať, že je najväčšie možné, pre čmeliaka zaujímavé, číslo, lebo je 10-ciferné a stále sme pri jeho vytváraní použili najväčšiu cifru, akú sme mohli.

Stredné 11:

V izbičkách v úli, usporiadaných ako na obrázku, býva vždy párny počet čmeliakov od 2 do 18. Súčet čmeliakov v každom riadku, stĺpci aj oboch uhlopriečkach je rovnaký. Koľko čmeliakov býva v súčte v sivých izbičkách?

	18	
14		6
		16

Výsledok: 10 + 8 = 18

Riešenie:

Keďže počet čmeliakov má byť v každom riadku a stĺpci rovnaký, vieme si vypočítať počet čmeliakov v jednotlivých riadkoch a stĺpcoch ako celkový počet čmeliakov podelený tromi (kvôli tomu, že máme 3 riadky aj 3 stĺpce):

$$(2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18) : 3 = 30$$

V každom riadku a stĺpci je teda práve 30 čmeliakov. Teraz si jednoducho vieme dopočítať počty čmeliakov v sivých izbičkách odčítaním počtov čmeliakov daných z obrázku:

- Izbička v poslednom stĺpci: 30 - (16 + 6) = 8.
- Izbička v druhom riadku: 30 - (14 + 6) = 10.

Súčet čmeliakov v sivých izbičkách je teda 10 + 8 = 18.

Stredné 12:

Čmeliak Bzučo bol zbierať maliny. Polovicu z toho, čo nazbieral, mu Dunčo zjedol. Tretinu z toho, čo ostalo, zjedol Fučo. 1 malina mu spadla do rieky. Domov si priniesol iba 7 malín. Koľko malín mal Bzučo v košíku na začiatku?

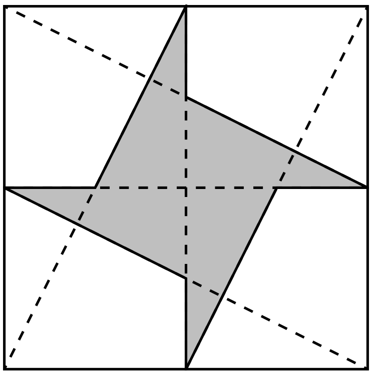
Výsledok: 24

Riešenie:

Na tento príklad sa pozrieme odzadu. Pred tým, ako Bzučo stratil jednu malinu, ich mal 7 + 1 = 8. Ďalej vieme, že Fučo mu zjedol tretinu malín, čo vtedy mal, a tak mu ostali dve tretiny, teda 8 malín. Jedna tretina je spolu 8 : 2 = 4 maliny, a preto mal predtým 4·3 = 12 malín. Nakoniec mu Dunčo zjedol polovicu z toho, čo mal, teda spolu mal na začiatku 12 · 2 = 24 malín.

Stredné 13:

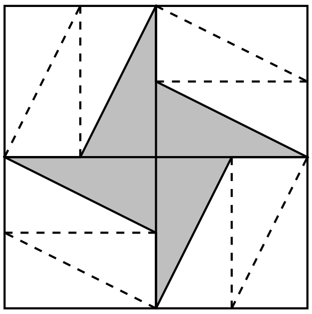
Stena úľa má tvar štvorca s dĺžkou strany 8 metrov. Čiary na nej spájajú vrcholy a stredy strán. Aký je obsah sivej časti steny?



Výsledok: 16 m^2

Riešenie:

Rozdelíme si obrázok na 16 rovnakých trojuholníkov ako na obrázku tak, že budú 4 v každom rohovom štvorci.



Obsah úľa je 8 m·8 m = 64 m^2. Keďže obsah všetkých trojuholníkov je rovnaký ako obsah celého úľa a z 16 trojuholníkov sú zafarbené 4, tak sivá časť tvorí štvrtinu z celého obsahu úľa. Takže obsah sivej časti je 64 m^2 : 4 = 16 m^2.

Stredné 14:

Práca slizniaka Rexa ho zaniesla na súostrovie, ktoré sa skladá z niekoľkých malých ostrovov a jedného veľkého. Dostal za úlohu postaviť mosty medzi ostrovmi tak, aby bol veľký ostrov spojený s každým malým ostrovom dvoma mostami a akékoľvek dva malé ostrovy boli spojené jedným mostom. Do včera boli postavené všetky mosty medzi malými ostrovmi a niekoľko (nie menej ako jeden) mostov vedúcich na veľký ostrov, spolu 28 mostov. Koľko ostrovov je celkovo v súostroví?

Výsledok: 8

Riešenie:

Najprv sa pozrime, ako spočítať počet mostov medzi malými ostrovmi. Ukážeme si to na príklade, keď malých ostrovov je 5 a pretože každý ostrov je spojený s každým, každého ostrovu vedú štyri mosty. Vyberieme si ľubovoľný malý ostrov. Ten je spojený s každým ďalším malým ostrovom práve jedným mostom, a teda z neho vedú štyri mosty. Pozrieme sa na ďalší, o ktorom platí to isté, ale jeden jeho most sme už započítali v tých štyroch, preto pripočítame iba tri. Takto sa pozrieme na ďalší, ktorému sme už dva mosty započítali, a teda pripočítame len dva. No a na poslednom ostrove sme už jeho tri mosty započítali, a tak pripočítame iba jeden most. Takže 5 malých ostrovov je spojených 10 mostami.

Teda pokiaľ máme 5 ostrovov, mostov medzi nimi je $4 + 3 + 2 + 1$, teda 10.

Veľký ostrov je s každým malým ostrovom spojený práve dvoma mostami, teda všeobecne z veľkého mosta vychádza dvakrát viac mostov. Vieme, že Rex nestihol postaviť všetky mosty na veľkom ostrove, ale postavil všetky na malých ostrovoch.

Podľa vysvetlenia vyššie vieme, že na šiestich malých ostrovoch by bolo 15 mostov, keď k nim však pripočítame $2 \cdot 6$ teda 12 mostov, vyjde nám, že celkovo by bolo postavených 27 mostov, ostrovov teda musí byť viac.

Zároveň si podľa nášho postupu jednoducho spočítame, že keby bolo malých ostrovov 8, tak je medzi nimi 28 mostov, lenže žiadny nespája veľký ostrov, čo vyžaduje zadanie, takže ich 8 nemôže byť.

Z toho nám vyplýva, že malých ostrovov je sedem, mostov medzi sebou majú 21 a zvyšných sedem vychádza z veľkého ostrova. Pripočítame veľký ostrov a vyjde nám, že v súostroví je presne osem ostrovov.

Stredné 15:

Nájdite všetky počty čmeliakov v úli, pre ktoré platí, že ak ich sčítame s ich druhým najväčším deliteľom a s ich najmenším deliteľom, dostaneme výsledok 2026.

Výsledok: 1350

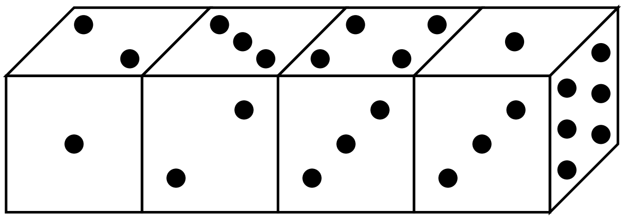
Riešenie:

Najväčším deliteľom každého čísla je to samotné číslo a najmenším deliteľom každého čísla je 1, takže počet čmeliakov spolu s ich druhým najväčším deliteľom musí byť 2025. Ak je počet čmeliakov párny, jeho druhý najväčší deliteľ je presne jeho polovica. Vtedy si môžeme predstaviť tri rovnaké diely (dva diely tvoria čmeliaky a jeden diel ich polovicu), ktoré spolu dávajú 2025. Jeden diel vypočítame ako $2025 : 3 = 675$ a hľadaný počet čmeliakov sú dva takéto diely, teda $675 \cdot 2 = 1350$.

Ak je počet čmeliakov nepárny, potom aj jeho druhý najväčší deliteľ musí byť nepárny. Ale my vieme, že súčet týchto dvoch čísel má byť 2025, čo je nepárne číslo. A keďže súčtom dvoch nepárnych čísel dostaneme vždy iba párne čísla, táto možnosť nevedie k žiadnemu riešeniu.

Stredné 16:

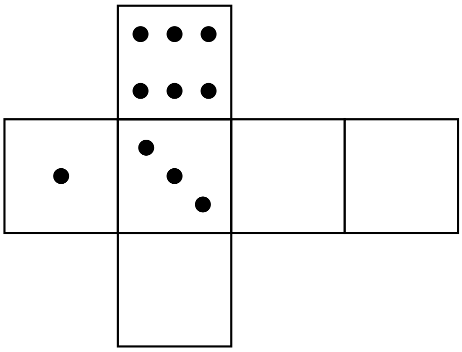
Bzučo sa hral so štyrmi rovnakými hracími kockami. Usporiadal si ich tak, ako je zobrazené na obrázku. Avšak, nie sú to bežné hracie kocky a nemusí platiť, že súčet na protiľahlých stenách kocky je 7. Aký je súčet bodiek na 6 stenách, ktorými sú k sebe kocky priložené?



Výsledok: 20

Riešenie:

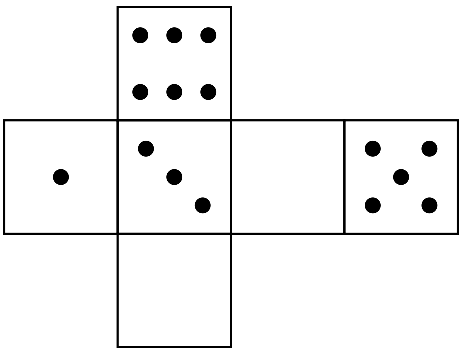
Nakreslime si sieť poslednej kocky:



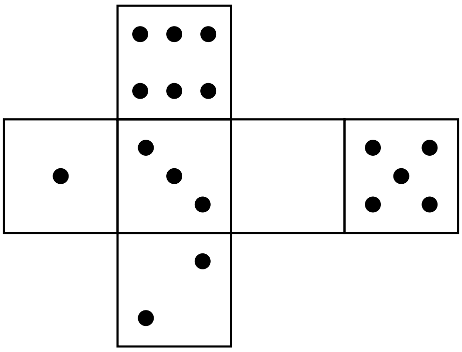
Pozrime sa, s akými číslami susedí na kocke číslo 3. Z druhej kocky vieme, že trojka susedí s dvojkou, z tretej kocky vieme, že trojka susedí aj so štvorkou, a z poslednej kocky, ktorú už máme zakreslenú, vidíme, že trojka susedí aj s jednotkou a šestkou.

Teda susedia trojky sú: 1, 2, 4, 6. Z toho vyplýva, že jediné číslo, ktoré s trojkou nesusedí, je 5.

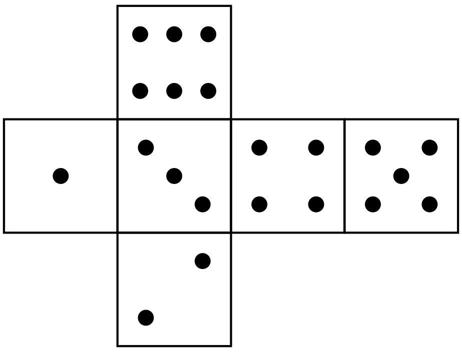
Všimnime si, že na sieti nám už zostalo iba jedno voľné políčko, ktoré nesusedí s trojkou, a teda práve tam bude číslo 5:



Z prvej kocky vidíme, že jednotka a dvojka sú susedné. Na sieti vidíme, že jednotka susedí už iba s jedným voľným políčkom, na ktorom teda musí byť dvojka.



Posledné číslo, ktoré nám chýba, je štvorka, ktorej už zostáva len posledné voľné políčko:



Teda už vieme, ako vyzerá kocka, a môžeme sčítavať.

Zo siete vieme, že jednotka a dvojka majú spoločných susedov 3 a 5, a že päť je z pohľadu jednotky napravo od dvojky, a teda prvá kocka bude zdieľať stranu s piatimi bodkami.

Zo siete kocky vieme, že spoločnými susedmi dvojky a trojky sú 4 a 1, a teda druhá kocka bude zdieľať stranu s jednou a štyrmi bodkami.

Ďalej zo siete vieme, že spoločnými susedmi štvorky a trojky sú 6 a 2, a teda tretia kocka bude zdieľať stranu s dvoma a šiestimi bodkami.

A zo siete kocky rovnako vieme, že oproti 6 je 2, a teda posledná kocka bude zdielať stranu s dvoma bodkami.

Teda celkový súčet bude 5 + 4 + 1 + 6 + 2 + 2 = 20.

Stredné 17:

Bzučo si očísloval kvietky v záhrade od 1 do 1000. Slimák Dunčo odtrhol lupeň každému kvietku s číslom obsahujúcim cifru 9 a slizniak Rex odtrhol lupeň každému kvietku s číslom deliteľným číslom 9. Koľko kvietkov ostalo nepoškodených?

Výsledok: 649

Riešenie:

Najprv sa pozrime na tie čísla, ktoré obsahujú cifru 9, a spočítajme ich. Všimnime si, že všetky čísla od 900 až po 999 obsahujú aspoň jednu 9 - na mieste stoviek. Preto tu máme 100 takých čísel. Teraz sa pozrime na to, ako to funguje na číslach 1 až 99. Na každú desiatku máme jedno také - to, ktoré má na mieste jednotiek 9. Takých je 10, lebo máme 10 desiatok, resp. 9 rôznych cifier, ktoré môžeme pred túto 9 napísať a potom ešte číslo

9, ktoré nemá pred sebou žiadnu cifru, ale je v prvej desiatke. Potom ešte všetky čísla od 90 do 99 majú 9, tentokrát na mieste desiatok. 99 sme už započítali, preto máme ďalších 9 čísel. Dokopy teda máme 19 takých čísel v tomto rozmedzí.

Môžeme si všimnúť, že všetky čísla od 101 do 199 vznikli iba tak, že sme napísali 1 pred nejaké číslo od 1 do 99 (resp. 10, ak ide o čísla 101 až 109). Keďže sme ale nenapísali žiadnu 9 naviac, tak počet čísel obsahujúcich 9 bude tu rovnaký ako medzi číslami 1 až 99, teda 19.

Rovnako to je aj pri číslach 201 až 299, 301 až 399, … , 801 až 899, všetky tieto skupiny budú mať 19 takých čísel. Teda dokopy je $9 \cdot 19 = 171$ takých čísel. Zvyšné čísla, teda 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 1000 číslo 9 neobsahujú, preto je dokopy $100 + 171 = 271$ čísel obsahujúcich 9.

Teraz sa pozrime na čísla deliteľné 9. To je každé deviate číslo, preto to vieme vypočítať ako $1000 : 9 = 111$ zvyšok 1. Teda je 111 takých čísel. Zvyšok iba hovorí, že sme neskončili na takom čísle, lebo 1000 nie je deliteľné 9.

Teda dokopy oboma spôsobmi bolo poškodených $271 + 111 = 382$ kvietkov. Tu sa ešte naša úloha nekončí, pretože niektoré kvietky mohli byť poškodené dvakrát. Preto potrebujeme zistiť ešte to, ktoré boli poškodené oboma spôsobmi, lebo ich sme započítali dvakrát.

Teda hľadáme také čísla, ktoré sú deliteľné 9 a zároveň obsahujú cifru 9. Vieme, že číslo je deliteľné 9, ak je jeho ciferný súčet deliteľný 9. Tento ciferný súčet môže byť:

- 9, potom jeho zvyšné cifry musia byť 0, lebo musíme použiť aspoň jednu 9 a keď ju použijeme, tak sa nám už viac nezmestí. Keďže čísla sa 0 nemôžu začínať, tak prvá cifra musí byť 9 a za ňu pripisujeme 0, teda také čísla sú $9, 90, 900$.
- 18, potom nemôže byť jednociferné. Ak je dvojciferné tak jedna cifra musí byť 9 a druhá musí byť preto $18 - 9 = 9$, teda také číslo je iba 99. Ak je trojciferné, tak súčet zvyšných dvoch cifier je z rovnakých dôvodov 9. Tento súčet vieme dostať ako nasledovné súčty: $1 + 8, 2 + 7, 3 + 6, 4 + 5$. Teda máme 4 rôzne trojice cifier (189, 279, 369, 459) a čísla z nich dostaneme poprehadzovaním cifier. Počet čísel, ktoré dostaneme z jednej trojice vypočítame ako $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, lebo na prvú cifru máme 3 možnosti na výber, na druhú už len zvyšné dve a na tretiu už len jednu. Keďže sú tieto trojice 4, tak celkovo je takých čísel $6 \cdot 4 = 24$. Ešte súčet 9 vieme dostať ako $9 + 0$. Také čísla sú 909 a 990, teda dokopy 27 čísel s ciferným súčtom 18.
- 27, potom to číslo musí byť 999, lebo inak by sme potrebovali až 4 cifry. Zároveň tým vidíme, že viac ako 27 ciferný súčet byť nemôže, lebo by sme na to potrebovali štyri cifry (a 1000 má príliš malý ciferný súčet).

Teda celkovo máme $3 + 27 + 1 = 31$ čísel, ktoré sú deliteľné 9 a zároveň obsahujú cifru 9. Teda toľko kvietkov bolo poškodených dvakrát a toľko čísel sme započítali dvakrát. Preto skutočne bolo poškodených $382 - 31 = 351$ kvietkov. Nepoškodených preto ostalo $1000 - 351 = 649$ kvietkov.

Stredné 18:

Na lúke máme 4 tímy – Čmeliakov, Motýle, Osy a Komáre. Na konci sezóny mal každý tím odohrané s každým tímom práve 4 futbalové zápasy. Za výhru sa dostávali 3 body pre víťazný tím a za remízu išlo obom tímom po 1 bode. Na konci sezóny boli počty bodov nasledovné: Čmeliaci 22, Motýle 19, Osy 14, Komáre 12. Koľko zápasov skončilo remízou?

Výsledok: 5

Riešenie:

Keby každý tím hral s každým len jeden zápas, bolo by odohraných 6 zápasov. Každý tím hral ale s každým až 4 zápasy, teda sa hralo 6 · 4 = 24 zápasov. Za každý zápas boli dokopy získané 3 body, to keď skončil výhrou, alebo 2 body, keď skončil remízou. Za remízu teda do celkového počtu bodov pribudlo o bod menej než za víťazstvo jedného z tímov.
Keby všetkých 24 zápasov skončilo výhrou jedného z tímov, dokopy by všetky tímy dostali 24 · 3 = 72 bodov. Dokopy však tímy získali 22 + 19 + 14 + 12 = 67 bodov. To znamená, že bolo získaných o 72 - 67 = 5 bodov menej, a teda muselo 5 zápasov skončiť remízou.

Stredné 19:

Dvojičky Bzučo a Fučo majú v svojich šatníkoch rovnaké množstvo oblečenia: päť rôznych tričiek, štvoro rôznych nohavíc a tri rôzne páry topánok. Bzučo sa oblieka po svojom, a tak nemá problém chodiť bez trička, a zároveň je mu jedno, či mu ladí pravá topánka s ľavou. O koľko viac rôznych kombinácií oblečenia si vie Bzučo obliecť oproti Fučovi?

Výsledok: 156

Riešenie:

Fučo si musí vybrať práve jedno tričko z piatich. Pre každé vybrané tričko má 4 možnosti na výber nohavíc a pre každú z nich má 3 možnosti na výber topánok. Dokopy má tak 5 · 4 · 3 = 60 možností na výber oblečenia.

Keď si Bzučo volí tričko, má až 6 možností – buď jedno z jeho piatich tričiek, alebo môže ísť bez trička. Pre každú z nich má na výber nohavíc tiež 4 možnosti. Nakoniec má 3 ľavé topánky a 3 pravé topánky, a keďže mu nezáleží na tom, či mu spolu tieto topánky ladia, tak má 3 · 3 = 9 možností na obutie topánok. Dokopy má tak 6 · 4 · 9 = 216 kombinácií oblečenia, čo je o 216 - 60 = 156 viac ako Fučo.

Stredné 20:

Čmeliak Bzučo dostal od slimáka Dunča dva 5-litrové sudy. V jednom z nich boli 4 litre medu a v druhom 4 litre vody. Najprv Bzučo prelial 1 liter medu do vody a spolu ich zamiešal. Potom prelial 1 liter tejto zmesi naspäť do sudu s medom. Koľko percent objemu zmiešaniny v sude, v ktorom bol pôvodne iba med, tvorí med teraz?

Výsledok: 80

Riešenie:

Po prvom preliatí sa v sude, v ktorom sa pôvodne nachádzala len voda, budú nachádzať 4 litre vody a 1 liter medu. Med teda bude tvoriť 1 l : (1 l + 4 l) = 20% objemu sudu. Keďže Bzučo sud poriadne zamiešal, bude aj liter zmesi následne preliaty do pôvodne medového suda tvorený z 20% medom.

Po druhom preliatí bude teda pôvodne medový sud naplnený 3 litrami čistého medu a litrom zmesi. Obsah tohto sudu bude teda zo 75% tvorený 100% medom a 25% objemu bude obsahovať 20% zmes medu. Práve priliaty med bude teda tvoriť 25% · 20% = 5% objemu celého sudu, takže celý sud bude obsahovať 75% + 5% = 80% zmes medu.

Ťažké

Ťažké 1:

Čmeliak Bzučo má tri kartičky, pričom na každej kartičke je napísané jedno kladné celé číslo. Keď sa slimák Dunčo spýtal Bzuča, aké čísla to sú, prezradil mu len to, že ich súčet a súčin sú navzájom rovnaké. Zároveň je súčet týchto troch čísel najväčší možný. Aké čísla má Bzučo na kartičkách?

Výsledok: 1, 2, 3

Riešenie:

Na začiatok sa pozrime, čo by sa stalo, ak by Bzučo nemal ani na jednej kartičke jednotku. V takom prípade by jeho najmenší možný súčet, aký by mohol dosiahnuť, bol:“

$$2 + 2 + 2 = 6$$

a súčin by bol:

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Všimnime si, že teraz je súčet menší ako súčin. Ak zväčšíme jedno z čísel, súčin sa vždy zvýši viac než súčet.
Prečo? Preto, lebo keď zväčšíme hocijaké z čísel o 1, vždy sa súčet zvýši tiež o 1. Ale súčin sa zvýši vždy o toľko, koľko je druhé číslo, ktoré násobíme. A to vidíme, že už teraz (pri najmenšej z možností) je o 4.

Teda by sa súčet a súčin nikdy nemohli rovnať. To znamená, že aspoň jedno z čísel musí byť 1.

Násobenie jednotkou nemení číslo, teda vieme, že súčin zvyšných dvoch čísel musí byť rovnaký ako súčet daných čísel plus 1.

Avšak ak by dve z čísel boli 1, súčin by bol rovný tretiemu z čísel. Avšak súčet by bol o 2 väčší. Z toho vieme, že presne jedno z čísel je 1.

Pozrime sa, čo by sa stalo, ak by boli zvyšné dve čísla párne. Ak by nastala táto možnosť, potom by súčet bol nepárny (párne + párne + 1 = nepárne), zatiaľ čo súčin by bol párny, pretože 1 · párne · párne = párne. To však nemôže platiť, lebo nepárne číslo sa nemôže rovnať párnemu. Z toho vieme, že ak nemôžu byť obe čísla párne, tak aspoň jedno ďalšie Bzučovo číslo musí byť nepárne. Tak sa na to poďme pozrieť postupne, aké môže byť:

Najprv si označme posledné neznáme číslo A.
Ak bude Bzučovo druhé číslo 3:

$$1 + 3 + A = 1 \cdot 3 \cdot A$$

$$4 + A = 3 \cdot A$$

Hľadáme teda číslo, ku ktorému keď pripočítame 4, tak bude trikrát väčšie ako pôvodné číslo, a to je práve 2. $(4 + 2 = 3 \cdot 2)$

Ak bude druhé Bzučovo číslo väčšie ako 3, takže bude najmenej 4.

Ale tu vidíme, že aj keby sme za tretie číslo zobrali najmenšie možné, a to 2, súčin bude väčší ako súčet. A to už vieme, že sa zväčšovaním čísel nikdy nezmení. Teda sa nikdy nebudú rovnať.

Teda jediná, a tak aj najväčšia možnosť je, že Bzučo mal na kartičkách čísla 1, 2 a 3.

Ťažké 2:

Bzučov kamarát slimák Dunčo sa rozhodol vyliezť na vtáčiu búdku. Každý deň sa mu podarí vyliezť 80 cm. V noci však vždy počas spánku klesne o 58 cm naspäť. Na koľký deň sa vyšplhá na vtáčiu búdku, ktorá je vo výške 300 cm?

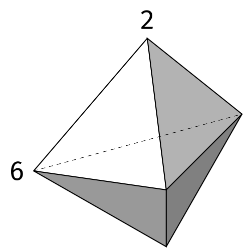
Výsledok: 11

Riešenie:

Každé ráno sa slimák Dunčo ocitne o 80 cm - 58 cm = 22 cm vyššie ako predošlé ráno. Ráno jedenásteho dňa sa slimák Dunčo zobudí vo výške 10 · 22 cm = 220 cm. Najvyššia výška, ktorú doteraz dosiahol nastala tesne predtým, ako sa deň predtým uložil spať a nachádzal sa vo výške 220 cm + 58 cm = 278 cm. Všimnime si, že táto výška ešte nedosiahla žiadaných 300 cm a teda slimák Dunčo musí pokračovať vo svojej ceste. Na konci jedenásteho dňa bude o 80 cm vyššie ako ráno, a teda dosiahne výšku 220 cm + 80 cm = 300 cm. Vtáčiu búdku teda slimák Dunčo dosiahne na jedenásty deň.

Ťažké 3:

Bzučov úľ vyzerá ako na obrázku. V každom vrchole sa nachádzalo nejaké číslo, no Bzučo na všetky okrem dvoch zabudol. Pamätá si však, že súčet čísel vo vrcholoch každého samostatného trojuholníka na povrchu úľa je stále rovnaký. Aký je súčet všetkých 5 čísel na Bzučovom úli?



Výsledok: 22

Riešenie:

Súčet čísel vo vrcholoch ľavého a pravého horného trojuholníka je rovnaký. Tieto dva trojuholníky majú spoločný vrchol s číslom 2 a predný vrchol, teda aj ich tretie vrcholy musia mať rovnaké čísla, čiže ľavý aj pravý vrchol sú 6.

Zadný horný trojuholník má teda súčet 2 + 6 + 6 = 14. Rovnaký súčet má aj každý iný trojuholník. Teraz sa môžeme postupne pozerať aj na zvyšné trojuholníky a zisťovať, aké čísla sa nachádzajú vo zvyšných dvoch vrcholoch. V skutočnosti sa nám ale stačí pozrieť na to, aký majú súčet, keďže nás na konci bude zaujímať len súčet všetkých vrcholov. Ten môžeme zistiť z ľavého spodného trojuholníka. Ten má tiež súčet všetkých vrcholov 14, a teda dva vrcholy, ktorých čísla nepoznáme, majú súčet 14 - 6 = 8.

Súčet čísel vo všetkých vrcholoch je teda 2 + 6 + 6 + 8 = 22.

Ťažké 4:

Pre nelietajúci hmyz je na lyžiarskom stredisku zriadená lanovka. Jej súčasťou je 126 kabínok očíslovaných číslami od 1 po 126 v takom poradí (teda za kabínkou č. 1 nasleduje č. 2, atď. až za č. 126 nasleduje č. 1). Ak slimák Dunčo nastúpil do kabínky č. 24, kabínku s akým číslom bude míňať v polovici trasy lanovky?

Výsledok: 87

Riešenie:

Kabínky v lyžiarskom stredisku sa točia v kruhu. Kabínka, do ktorej Dunčo nasadol, má číslo 24 a práve sa nachádza v polovici trasy medzi stanicami lanovky. Kabínok je v stredisku 126 a keď toto číslo vydelíme 2, zistíme, koľko kabínok (presnejšie medzier medzi kabínkami) sa nachádza v jednej polovici kruhu, čiže napríklad medzi Dunčovou kabínkou a kabínkou oproti, ktorú práve míňa sa nachádza 126 : 2 = 63 medzier.
V každej polovici kruhu sa nachádza práve 63 kabínok. Ak teda chceme zistiť, ktorá kabínka je na kružnici oproti Dunčovej kabínke, iba k číslu jeho lanovky (24) pripočítame 63. Oproti Dunčovej kabínke sa nachádza kabínka s číslom 63 + 24 = 87.

Ťažké 5:

Čmeliak Bzučo si myslí trojciferné číslo s rôznymi nenulovými ciframi. Slimák Dunčo z neho vytvoril ďalších niekoľko čísel tým, že poprehadzoval poradie cifier. Keď všetky tieto novovzniknuté čísla sčítal, dostal súčet 2026. Aké číslo si myslel Bzučo?

Výsledok: 416

Riešenie:

Na začiatku sa pozrime, koľko čísel mohol Dunčo vytvoriť. Z troch rôznych cifier môžeme poskladať 3 · 2 · 1 = 6 rôznych čísel ($\overline{ABC}$, $\overline{ACB}$, $\overline{BAC}$, $\overline{BCA}$, $\overline{CBA}$, $\overline{CAB}$).

(Pozn.: číslo, ktoré značíme ako $\overline{XYZ}$, je trojciferné číslo, ktoré má na mieste stoviek cifru X, na mieste desiatok cifru Y a na mieste jednotiek cifru Z.)

Všimnime si, že prvá cifra Bzučovho čísla je dvakrát na mieste stoviek, dvakrát na mieste desiatok a dvakrát na mieste jednotiek. To isté platí aj pre druhú a tretiu cifru Bzučovho čísla.

Teda súčet všetkých čísel, ktoré sa dajú vytvoriť z Bzučovho čísla, vypočítame ako:

$$\begin{gathered}100 \cdot A + 100 \cdot A + 10 \cdot A + 10 \cdot A + A + A \\ +100 \cdot B + 100 \cdot B + 10 \cdot B + 10 \cdot B + B + B \\ +100 \cdot C + 100 \cdot C + 10 \cdot C + 10 \cdot C + C + C\end{gathered}$$

Po sčítaní dostaneme $222 \cdot A + 222 \cdot B + 222 \cdot C$.

Pozrime sa na to, aký ciferný súčet by mohlo mať Bzučovo číslo. Vieme, že súčet všetkých možných vytvorených čísel je 222-násobok prvej cifry, plus 222-násobok druhej cifry, plus 222-násobok tretej cifry. Čo je vlastne iba 222-násobok ciferného súčtu pôvodného čísla.

Teraz môžeme vyskúšať rôzne ciferné súčty, aby sme zistili, ktoré vyhovujú, lebo vieme, že 5 novovytvorených čísel musí mať súčet 2026.
Pre ciferný súčet 9 má všetkých 6 čísel súčet 222 · 9 = 1998, čo je primálo, takže ciferný súčet musí byť aspoň 10.

Vieme, že 5 novovytvorených čísel musí mať súčet 2026, to znamená, že keď vypočítame súčet všetkých šiestich vytvorených čísel a odpočítame od toho pôvodné číslo, musí nám vyjsť 2026. Inak povedané, ak od súčtu všetkých šiestich vytvorených čísel odpočítame 2026, musí nám vyjsť pôvodné číslo.

Ďalšie možnosti môžeme skúšať tak, že najprv vypočítame súčet všetkých šiestich čísel podľa zvoleného ciferného súčtu a následne odpočítame 2026 . Musí nám vyjsť pôvodné číslo, ktoré má správny ciferný súčet.

Ak $A + B + C = 10$ dostaneme:

$$\overline{ABC} = 222 \cdot 10 - 2026 = 194,$$

ale v tomto prípade platí, že $A = 1$, $B = 9$ a $C = 4$, čiže $A + B + C = 14$, a teda táto možnosť nie je správna.

Pre $A + B + C = 11$ dostaneme:

$$\overline{ABC} = 222 \cdot 11 - 2026 = 416,$$

a teda $A = 4$, $B = 1$ a $C = 6$, pričom platí aj $A + B + C = 11$.

Bzučo si mohol myslieť číslo 416.

Našli sme prvú možnosť, ale musíme sa ešte pozrieť ďalej, či neexistuje aj ďalšie riešenie.

Pre $A + B + C = 12$ dostaneme:

$$\overline{ABC} = 222 \cdot 12 - 2026 = 638,$$

ale v tomto prípade platí, že $A = 6$, $B = 3$ a $C = 8$, čiže $A + B + C = 17$, a teda táto možnosť nie je správna.

Pre $A + B + C = 13$ dostaneme:

$$\overline{ABC} = 222 \cdot 13 - 2026 = 860,$$

ale v tomto prípade platí, že $A = 8$, $B = 6$ a $C = 0$, čiže $A + B + C = 14$, a teda táto možnosť nie je správna.

Pre $A + B + C = 14$ dostaneme:

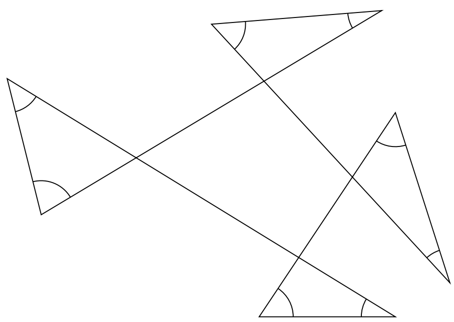
$$\overline{ABC} = 222 \cdot 14 - 2026 = 1082,$$

ale 1082 nie je trojciferné číslo, a tak súčet A+B+C nemôže byť 14 ani žiadne väčšie číslo.

Bzučo si teda myslel číslo 416.

Ťažké 6:

Aký je súčet veľkostí 8 vyznačených uhlov na obrázku?



Výsledok: 360°

Riešenie:

Súčet uhlov v štvoruholníku medzi trojuholníkmi je 360°. V jednom trojuholníku je súčet vnútorných uhlov 180°, a tak všetky štyri trojuholníky majú spolu $4 \cdot 180° = 720°$. Všetky neoznačené uhly v trojuholníkoch sú vrcholové s uhlami v štvoruholníku. Pomocou toho vieme určiť, že súčet iba vyznačených uhlov je $720° - 360° = 360°$.

Ťažké 7:

Koľko najviac litrov medu nevieme presne nabrať pomocou 7 a 9 litrovej naberačky?

Výsledok: 47

Riešenie:

Všimnime si, že pridaním 7 litrovej naberačky k nabranému medu sa nezmení jeho zvyšok po delení siedmimi. Zároveň, akonáhle naberieme množstvo s istým zvyškom po delení siedmimi, už naberieme aj všetky väčšie množstvá s daným zvyškom pridávaním 7 litrovej naberačky.

Pozrime sa na to, kedy najskôr sa nám podarí nabrať už množstvá medu s každým zvyškom po delení siedmimi. To docielime len postupným naberaním 9 litrovou naberačkou, keďže tá druhá nemení zvyšok. Až keď sa nám teda podarí dosiahnuť nejaký zvyšok, tak vieme naberať aj všetky väčšie množstvá s daným zvyškom. Zvyšky násobkov čísla 9 po delení siedmimi sú postupne:

násobok	zvyšok
0	0
9	2
18	4
27	6
36	1
45	3
54	5

Všimnime si, že z dôvodov vyššie už budeme vedieť nabrať všetky množstvá, ktoré sú väčšie ako 54, keďže sme dosiahli všetky zvyšky po delení siedmimi. Zároveň vieme nabrať všetky množstvá, ktoré sú väčšie ako 45, ale nemajú zvyšok 5 po delení siedmimi, keďže všetky ostatné zvyšky sme už dosiahli. Najväčšie množstvo, ktoré nevieme nabrať, bude tak najväčšie množstvo medzi 45 a 54, ktoré má zvyšok 5 po delení siedmimi – 47 litrov.

Ťažké 8:

Do Bzučovho úľa vedie 10 schodov. Keď je Bzučo večer unavený a už nevládze lietať, vie naraz prejsť 1, 2 alebo 3 schody. Koľkými spôsobmi dokáže vyjsť celé schodisko?

Výsledok: 274

Riešenie:

Najprv si uvedomme, ako sa Bzučo môže dostať na niektorý zo schodov. Môže to urobiť prejdením jedného schodu zo schodu pod ním, dvoch schodov zo schodu o dva nižšie alebo troch schodov zo schodu o tri nižšie. Napríklad na desiaty schod sa vieme dostať nasledovnými krokmi: $9.schod + 1$, $8.schod + 2$, $7.schod + 3$. Teda počet možností, ako sa vie dostať na nejaký schod, bude súčet počtov možností, ako sa vie dostať na tri predchádzajúce schody.

Na prvý schod máme iba jednu možnosť, ako sa naň dostať, na druhý máme dve (vyjdeme 2 naraz alebo pôjdeme z prvého) a na tretí máme štyri možnosti (vyjdeme 3 naraz, pôjdeme z prvého schodu alebo z druhého, na ktorý máme dve možnosti ako sa dostať). Takto si ľahko do tabuľky môžeme zapísať, ako bude vyzerať počet možností pre ďalšie schody.

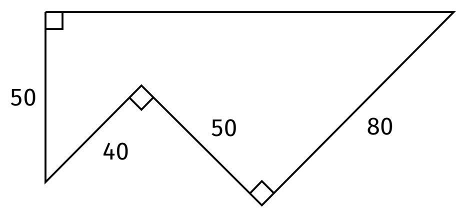
schod	výpočet	možnosti
1	1	1
2	1 + 1	2
3	1 + 1 + 2	4
4	1 + 2 + 4	7
5	2 + 4 + 7	13
6	4 + 7 + 13	24
7	7 + 13 + 24	44
8	13 + 24 + 44	81
9	24 + 44 + 81	149
10	44 + 81 + 149	274

Teda máme 274 možností, ako sa Bzučo môže dostať na desiaty schod.

Ťažké 9:

Bzučovo krídlo vyzerá ako na obrázku. Aký je obsah jeho krídla, ak sú dĺžky strán uvedené v milimetroch?

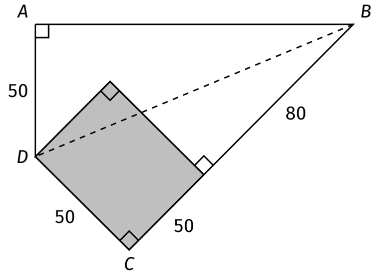
Pozn.: malé štvorčeky pri vrcholoch označujú pravé uhly, teda uhly o veľkosti $90°$*.*



Výsledok: 4000 mm^2

Riešenie:

Najprv si do zadania dokreslíme obdĺžnik so stranami 50, 40 ako na obrázku. Taktiež si označíme vrcholy štvoruholníka ako A, B, C, D a spojíme body B a D.



Teraz vidíme, že obsah, ktorý chceme vypočítať, je obsah celého útvaru mínus obsah dokresleného sivého obdĺžnika. Tiež si všimnime, že trojuholníky ABD a CBD zdieľajú stranu BD, majú rovnako veľký (pravý) uhol oproti tejto strane a strany AD, CD majú obe dĺžky 50. Tieto trojuholníky sú teda zhodné, čiže majú aj rovnaký obsah. Obsah jedného z nich je polovica násobku výšky a základne (polovica obdĺžnika s rovnakými dĺžkami strán). Naša podstava BC má dĺžku $40 + 80 = 120$ a výška CD má dĺžku 50. To znamená, že obsah trojuholníka bude $(120 \cdot 50) : 2 = 3000$. Taký istý obsah má aj trojuholník ABD. Obsah útvaru $ABCD$ bude súčet obsahov týchto dvoch trojuholníkov a teda $3000 \cdot 2 = 6000$. Od toho musíme ešte odpočítať obsah dokresleného obdĺžnika, ktorý je $50 \cdot 40 = 2000$. To znamená, že obsah nášho pôvodného útvaru bude $6000 - 2000 = 4000$.

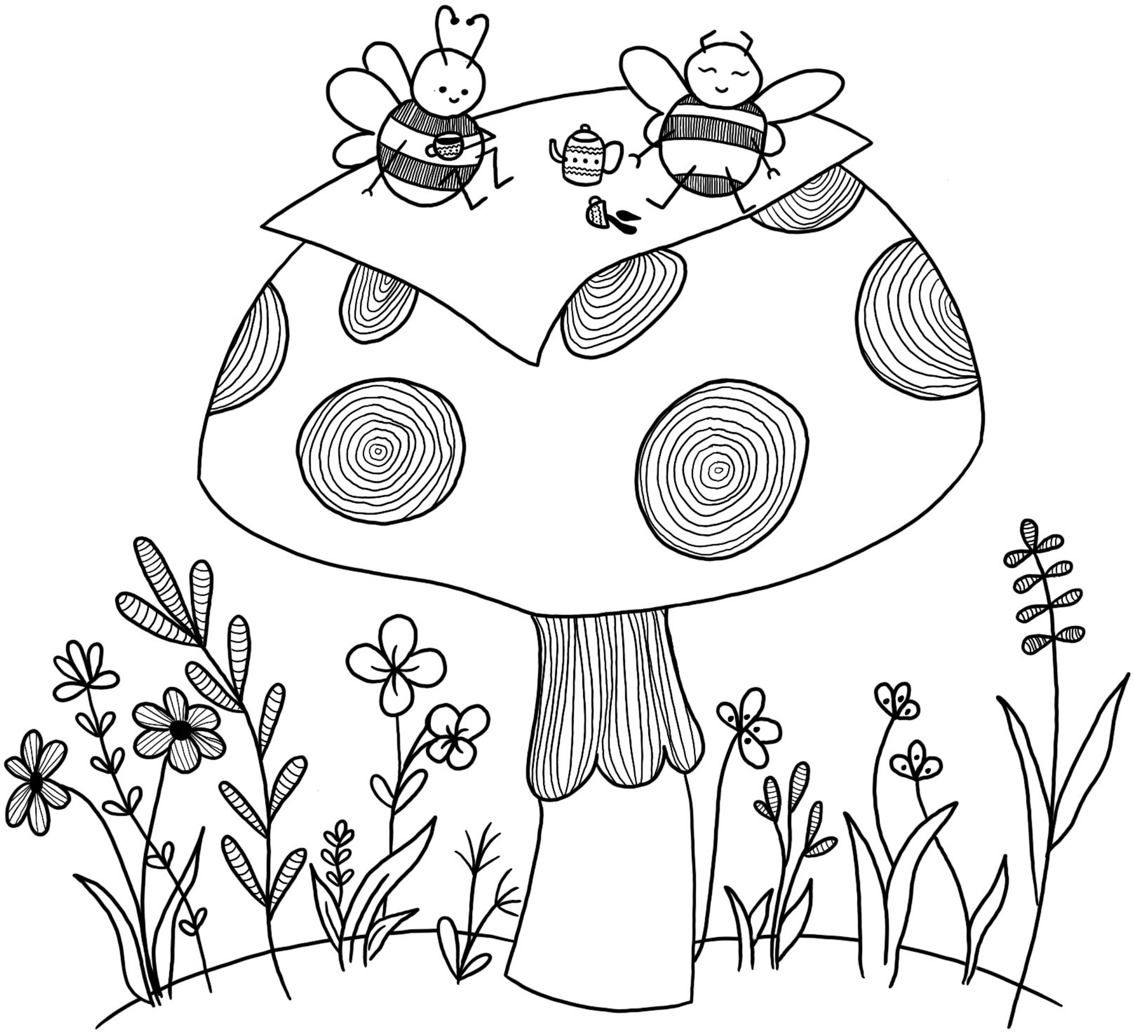
Ťažké 10:

Kvety v Bzučovej záhradke majú zaradom od 1 do 211 111 lupienkov. Koľko kvetov má taký počet lupienkov, že sa v nich nenachádza cifra 1?

Výsledok: 65609

Riešenie:

Čísla postupne rozdelíme podľa počtu cifier, ktoré obsahujú. Jednociferných čísel, ktoré neobsahujú cifru 1 je 8. Počet takých dvojciferných čísel vyrátame ako súčin $8 \cdot 9 = 72$, pretože na mieste desiatok môže byť 8 rôznych cifier a na mieste jednotiek 9. Podobne vyrátame aj počet takých trojciferných čísel→ $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$, štvorciferných→ $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 5832$ a aj päťciferných→ $8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 52488$.
Už nám stačí len vyriešiť čísla od 100 000 do 211 111. Čísla od 100 000 do 199 999 všetky začínajú cifrou 1, a preto nevyhovujú. Zvyšné čísla, od 200 000 do 211 111, buď začínajú iba na dvojčíslie 20, alebo 21. Dvojčíslie 21 obsahuje cifru 1, a teda nutne musí toto číslo začínať na dvojčíslie 20. Čiže nám stačí vyrátať počet možných štvorčíslí, ktoré sa dajú za to doplniť tak, aby neobsahovali 1 (štvorčíslie môže začínať aj cifrou 0). Takých je $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$, lebo na každú pozíciu vieme doplniť 9 rôznych cifier (všetky okrem 1).
Prešli sme všetky možnosti. Vyhovujúcich čísel bude dokopy $8 + 72 + 648 + 5832 + 52488 + 6561 = 65609$.



Mamut

Mamut je matematická súťaž organizovaná Združením STROM a Prírodovedeckou fakultou Univerzity Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach pre žiakov 4. až 6. ročníka základných škôl a prímy osemročných gymnázií. V roku 2026 sa konal už 24. ročník tejto súťaže a tretíktrát sa súťaž organizovala aj v meste Poprad.

Trvanie súťaže bolo 120 minút. Úlohy boli rozdelené podľa obťažnosti na 1-bodové (ľahké), 3-bodové (stredné) a 5-bodové (ťažké). Na začiatku súťaže každé družstvo dostalo prvých päť úloh: tri ľahké, jednu strednú a jednu ťažkú. Súťažiaci v tíme riešili ľubovoľnú z piatich úloh, ktoré mali k dispozícii. Po vyriešení úlohy súťažiaci odovzdal výsledok opravovateľovi, ktorý vyhodnotil jeho správnosť. Ak bol výsledok správny, súťažiaci úlohu odovzdal zadávateľovi, ktorý mu započítal body a vymenil ju za novú úlohu zvolenej obtiažnosti. V opačnom prípade mohol tím v riešení úlohy pokračovať a odovzdávať ju znova. Po treťom nesprávnom odovzdaní úlohy mohol opravovateľ vyžadovať okrem výsledku aj postup riešenia. Tím, ktorý vyriešil všetky súťažné úlohy pred uplynutím časového limitu, dostal za každú ušetrenú minútu 1 bod. Počas súťaže nebolo dovolené používať kalkulačky, rysovacie pomôcky a ani žiadnu literatúru.

Spolu so zadaniami úloh dostal na začiatku súťaže každý tím tri žetóny. Každý žetón žiakom umožňoval v druhej polovici súťaže (od konca 60. minúty až do konca súťaže) vymeniť úlohu za inú úlohu zvolenej obtiažnosti. Po použití tohto žetónu sa tím nemohol vrátiť k riešeniu úlohy, ktorú odovzdal spolu so žetónom. Okrem matematických úloh žiaci mohli počas súťaže absolvovať aj 3 športové úlohy, ktoré boli vyhlasované po 30, 60 a 90 minútach od začiatku súťaže. Za splnenie každej športovej úlohy získali súťažiaci 1 úlohu navyše podľa zvolenej obtiažnosti.

Aby sa vyrovnali vekové rozdiely medzi súťažiacimi, na začiatku súťaže získali družstvá za každého štvrtáka 5 bodov, za každého piataka 3 body a za každého šiestaka 1 bod.

Pri zhodnom počte bodov dvoch tímov rozhodol počet bodov za úlohy, ak aj tu nastala rovnosť, rozhodoval počet vyriešených úloh. V prípade, že ani toto kritérium nerozhodlo, poradie sa určilo podľa času odovzdania poslednej vyriešenej úlohy.

Pred začiatkom súťaže mali súťažiaci možnosť vypočítať rozcvičkovú sériu úloh, za ktorú dostávali malú odmenu vo forme pamätnej nálepky.

Zadania starších ročníkov nájdete na `www.strom.sk/malynar/akcie/mamut`.

autori:	Ján Richnavský, Veronika Jakabová, Alena Bálintová, Kalista Semacová, Martina Osuská, Lívia Lukáčová, Jakub Stramba, Tomáš Lang, Janka Urbanová, Jakub Katrák, Daniel Takáč, Magdaléna Škriabová, Oliver Seman, Michal Ferdinandy, Sarah Klopstock, Natália Tkáčová, Veronika Vodičková, Tomáš Sukeľ, Nina Betáková, Marie Kasalová, Michal Vodička, Sophia Sotáková, Nina Hudáková, Martin Mihálik, Matúš Libák
recenzia a úprava:	Ján Richnavský, Benjamín Mravec, Ľubomír Vargovčík, Branislav Ječim, Richard Vodička, Štefan Vašák, Bianka Gurská, Martin Dudjak, Patrik Paľovčík, Lujza Milotová, Eva Krajčiová, Matúš Libák
názov:	**Mamut – 29. 5. 2026**
vydavatelia:	Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta Združenie STROM
web:	www.strom.sk/malynar/akcie/mamut www.upjs.sk/prirodovedecka-fakulta/