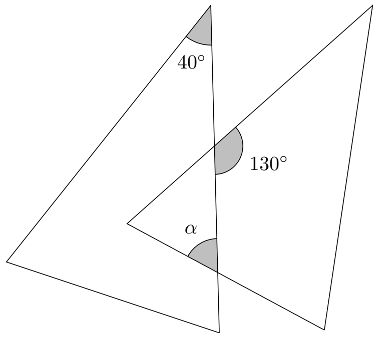
Košický Matboj

Košice, 25. 10. 2024

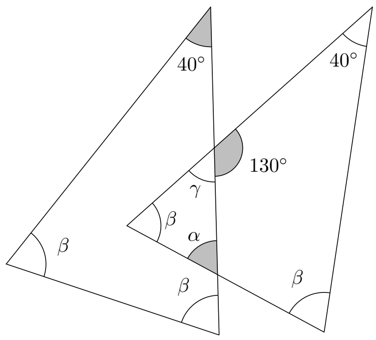
1. časť

Úloha 1.1: Máme dva rovnoramenné podobné trojuholníky, ktoré sa prekrývajú ako na obrázku. Aká je veľkosť uhla α?



Výsledok: 60

Riešenie: Keďže trojuholníky sú rovnoramenné a podobné, uhly pri ich základniach budú rovnako veľké. Môžeme si ich teda označiť napríklad β. Jeden uhol označený β bude mať veľkosť $(180° - 40°)/2 = 70°$. Uhol označený γ bude mať veľkosť $180° - 130° = 50°$, keďže je to susedný uhol s uhlom veľkým 130°. Potom uhol označený α bude mať veľkosť $180° - 70° - 50° = 60°$.



Úloha 1.2: Mirka napísala minulý týždeň štyri testy. Priemerný počet bodov, ktorý dostala z prvého, druhého a tretieho testu, bol 65. Jej priemerný počet bodov z druhého, tretieho a štvrtého testu bol 80. Na štvrtom teste dostala dvakrát viac bodov ako na prvom teste. Koľko bodov získala Mirka na prvom teste?

Výsledok: 45

Riešenie: Pomenujme si počty bodov za testy postupne a, b, c a d. Zapíšme si priemery zo zadania a zbavme sa zlomkov.

$$\frac{a+b+c}{3} = 65$$

$$a+b+c = 195 \tag{1}$$

$$\frac{b+c+d}{3} = 80$$

$$b+c+d = 240 \tag{2}$$

Teraz odčítame (1) od (2), aby sme sa zbavili prebytočných členov b a c, čím dostávame rovnosť $d - a = 45$. Zo zadania vieme, že Mirka dostala na štvrtom teste dvakrát viac bodov ako na prvom, teda že $d = 2a$. Po dosadení do rovnice dostávame $a = 45$.

Úloha 1.3: Aké existuje najmenšie číslo, ktorého súčin cifier je 2160?

Výsledok: 5689

Riešenie: Pozrime sa na prvočíselný rozklad čísla 2160. $2160 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5$. Keďže hľadáme najmenšie možné také číslo, tak skúsme v každej cifre zahrnúť čo najviac prvočísel z rozkladu čísla 2160. Môžeme si všimnúť, že prvočíslo 5 nevieme skombinovať so žiadnym iným z rozkladu, pretože výsledný súčin by bol väčší ako 9, a teda by nemohol byť cifrou. Prvočísla 3 z rozkladu môžeme skombinovať buď ako $3 \cdot 3 = 9$, alebo s prvočíslom 2 ako $2 \cdot 3 = 6$. Ak by sme takto vytvorili tri cifry 6, v rozklade by ostalo ešte navyše jedno prvočíslo 2, ktoré by sme nevedeli s ničím skombinovať. Hľadané číslo by tak muselo byť päťciferné (2, 5, 6, 6, 6). Ak by sme však trojky spojili do cifier 9 a 6, tak by nám ostali už len tri prvočísla 2, ktoré môžme spojiť do cifry 8. Hľadané číslo by tak bolo už len štvorciferné (5, 6, 8, 9). Iný spôsob ako skombinovať prvočísla 3 nie je, preto bude toto najlepšia možnosť. Teraz už len ostáva cifry zoradiť tak, aby vyšlo najmenšie číslo.

Úloha 1.4: Súčet kladného celého čísla n a jeho cifier je 204. Určte všetky možné hodnoty n.

Výsledok: 192 a 201

Riešenie: Všimnime si najskôr, že naše číslo má zrejme práve 3 cifry. Ak by malo cifier viac, bola by už samotná hodnota čísla n väčšia ako 204. Naopak, ak by malo cifier menej, platilo by, že súčet čísla n a jeho cifier je najviac $99 + 9 + 9 = 117 < 204$, čo odporuje zadaniu úlohy.

Označme si teraz naše trojciferné číslo n ako $\overline{abc}$. O ňom vieme zo zadania povedať, že $100a + 10b + c + a + b + c = 204$, a teda $101a + 11b + 2c = 204$. Poďme si teraz rozobrať jednotlivé prípady podľa toho, aká cifra sa nachádza na mieste stoviek.

- $a \geq 3$

  Ak je cifra na mieste stoviek ≥ 3, potom $101a \geq 303$. Z toho nám vyplýva, že táto cifra môže byť rovná iba 1 alebo 2.

- $a = 2$

  Ak je cifra na mieste stoviek 2, potom $202 + 11b + 2c = 204$, teda $11b + 2c = 2$. Na to, aby $11b + 2c = 2$, musí byť nutne $b = 0$ a $c = 1$.

  Čiže ak $a = 2$, dostaneme len jeden správny výsledok, a to $n = 201$

- $a = 1$

  Ak je cifra na mieste stoviek 1, potom $101 + 11b + 2c = 204$, teda $11b + 2c = 103$. Samozrejme $c \leq 9$ a odtiaľ $2c \leq 18$. Dosadením do $11b + 2c = 103$ dostaneme $11b \geq 85$, z čoho vyplýva, že b je buď 8, alebo 9.

  - ◇ $b = 8$

    V tomto prípade $88 + 2c = 103$, $2c = 15$. Táto možnosť však nevyhovuje, lebo cifra na mieste jednotiek by nebola celočíselná.

  - ◇ $b = 9$

    V tomto prípade $99 + 2c = 103$, $2c = 4$, $c = 2$.

  Čiže ak $a = 1$, potom máme len jeden správny výsledok, a to $n = 192$.

Jediné dve hodnoty n, ktoré vyhovujú zadaniu, sú 192 a 201.

Úloha 1.5: Hodnota smaragdu vážiaceho S gramov je $1000S^2$. Ametyst vážiaci A gramov má hodnotu $30A$. Dvaja dediči zdedili pozostalosť tvorenú smaragdmi a ametystami v celkovej hodnote troch miliónov. Rozdelili si ju tak, že každý drahokam rozpílili napoly a zobrali si po polovici. Každému dedičovi sa tak ušli drahokamy v hodnote osemstotisíc. Akú hodnotu mali všetky ametysty v pozostalosti?

Výsledok: 200 000

Riešenie: Zo zadania vieme, že celé dedičstvo má hodnotu $3 \cdot 10^6$, čo si vyjadríme takto:

$$1000S^2 + 30A = 3 \cdot 10^6$$

Zároveň si vyjadríme aj hodnotu dedičstva jedného z dedičov:

$$\begin{aligned}
1000\left(\frac{S}{2}\right)^2 + 30\frac{A}{2} &= 8 \cdot 10^5 \\
1000\frac{S^2}{4} + 30\frac{A}{2} &= 8 \cdot 10^5 \\
250S^2 + 15A &= 8 \cdot 10^5
\end{aligned}$$

Z tejto rovnice si vyjadríme hmotnosť smaragdov S, totiž S^2:

$$S^2 = \frac{(8 \cdot 10^5 - 15A)}{250}$$

A dosadíme do pôvodnej rovnice (celkovej hodnoty):

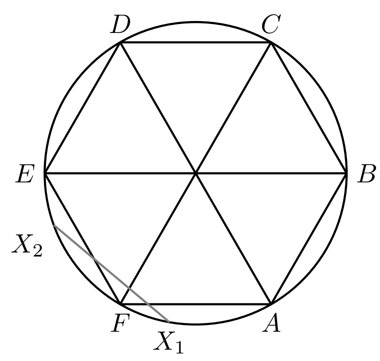
$$\begin{aligned}
\frac{1000(8 \cdot 10^5 - 15A)}{250} + 30A &= 3 \cdot 10^6 \\
4(8 \cdot 10^5 - 15A) + 30A &= 3 \cdot 10^6 \\
3{,}2 \cdot 10^6 - 60A + 30A &= 3 \cdot 10^6 \\
30A &= 2 \cdot 10^5
\end{aligned}$$

Hodnota ametystov v celom dedičstve je 200 000.

Úloha 1.6: Na kružnici s polomerom r zvoľme nezávisle dva body. Z každého bodu zostrojme tetivu dĺžky r v smere hodinových ručičiek. Aká je pravdepodobnosť, že sa tieto dve tetivy pretnú?

Výsledok: $\frac{1}{3}$

Riešenie: Najprv si ukážme, že ak do kružnice s polomerom r vpíšeme pravidelný šesťuholník, bude mať stranu dĺžky r. Spojme stred kružnice s vrcholmi šesťuholníka. Keďže vrcholy sa nachádzajú na kružnici, každá z týchto úsečiek má dĺžku polomeru r, a zároveň každý zo vzniknutých trojuholníkov je rovnoramenný. Pretože je šesťuholník pravidelný, tak tieto úsečky zvierajú rovnaký uhol. Ten môžeme vyjadriť ako $360°/6 = 60°$. Trojuholníky sú rovnoramenné, nuž vieme dopočítať aj uhly pri stranách šesťuholníka. $(180° - 60°)/2 = 60°$. Trojuholníky sú teda rovnostranné a strana šesťuholníka má dĺžku r.



Vráťme sa späť k úlohe. Zafixujme si polohu prvého bodu (pomenujme ho A) a pozrime sa, na akej časti kružnice sa môže nachádzať druhý bod, aby sa tetivy pretli. Vpíšme do kružnice pravidelný šesťuholník $ABCDEF$ so stranou dĺžky r tak, aby jedným z jeho vrcholov bol práve bod A. Tetiva vedúca z bodu A je strana AF. Všimnime si, že tetivy sa pretnú, iba ak sa druhý bod bude nachádzať na kružnicovom oblúku BF obsahujúcom bod A (na obrázku vidíme príklad takej tetivy X_1X_2). Množina týchto bodov pokrýva tretinu obvodu kružnice.

Úloha 1.7: Figúrka sa môže po mriežke pohybovať hore, doprava a dole. Aspoň raz za každé dva ťahy sa ale pohne doprava. Koľko existuje rôznych ciest dĺžky 16 z bodu $[0,0]$ do $[10,0]$?

Výsledok: $\binom{11}{6}\binom{6}{3} = 462 \cdot 20 = 9240$

Riešenie: Aby sme sa dostali z $[0,0]$ do $[10,0]$, musíme použiť práve 10 pohybov doprava. Zostáva 6 vertikálnych pohybov, t. j. hore alebo dole. Navyše počet pohybov hore musí byť rovnaký ako počet pohybov dole, keďže začíname aj končíme na rovnakej druhej súradnici.

Najprv zistime, koľkými spôsobmi vieme usporiadať vertikálne pohyby. Medzi každé dva pohyby doprava môžeme umiestniť najviac jeden pohyb vertikálne, pohyb môžeme umiestniť aj na začiatok alebo koniec. Ak máme 10 pohybov doprava, tak máme 11 miest na umiestnenie vertikálneho pohybu. Vyberáme teda 6 miest z 11, čo nám dáva $\binom{11}{6} = 462$ možností.

Pre každú z týchto možností ešte musíme rozhodnúť, ktorý vertikálny pohyb bude hore, a ktorý dole. Jediná podmienka je, že pohybov hore bude rovnako ako dole, čiže budú 3. Volíme tak zo 6 miest 3, kde sa pohneme hore, čo dáva $\binom{6}{3} = 20$ možností.

Dokopy máme $\binom{11}{6}\binom{6}{3} = 462 \cdot 20 = 9240$ ciest.

Úloha 1.8: Nech x je periodické číslo s jednocifernou alebo dvojcifernou periódou, pričom $0 < x < 1$. Vyjadrime si x v tvare zlomku v základnom tvare ako a/b. Koľko rôznych hodnôt môže dosahovať prirodzené číslo b?

Výsledok: 5

Riešenie: Zapíšme si x po cifrách ako $0{,}\overline{cd}$, kde c a d sú cifry a nadčiarknutie označuje periódu, nie iba zápis po čísliciach. Potom $100 \cdot x = cd{,}\overline{cd}$, a teda $99 \cdot x = 100 \cdot x - x = cd$, čím nemyslíme súčin $c \cdot d$, ale číslo $10 \cdot c + d$, nazvime ho k.

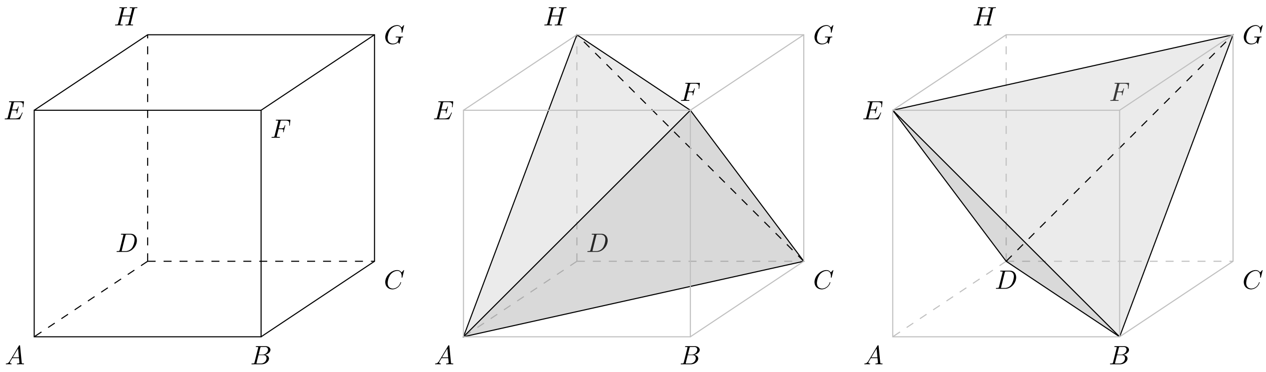
Dosadením základného tvaru dostávame rovnosť $99 \cdot a/b = k$, čiže $99 \cdot a = b \cdot k$. Odtiaľ $b \mid 99 \cdot a$ a následne $b \mid 99$, pretože a a b tvoriace základný tvar sú nesúdeliteľné. Číslo 99 má šesť kladných deliteľov (1, 3, 9, 11, 33 a 99), z nich pre $b = 1$ neexistuje vhodný čitateľ a (aby $0 < a/b < 1$) a pre ostatné existuje.

Úloha 1.9: Dva rôzne pravidelné štvorsteny majú vrcholy vo vrcholoch jednotkovej kocky. Aký je objem prieniku daných štvorstenov?

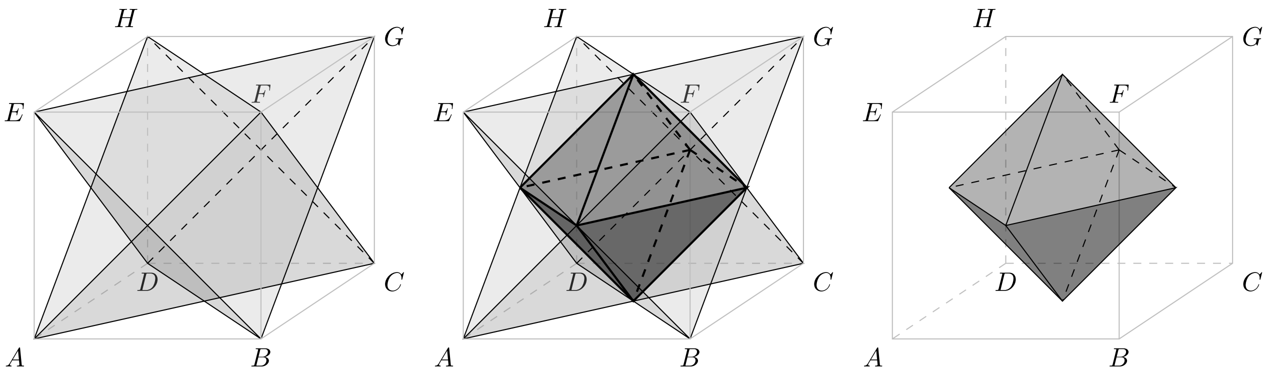
Výsledok: 1/6

Riešenie: Keďže majú štvorsteny vrcholy vo vrcholoch kocky a sú pravidelné, musí mať hrana štvorstena takú dĺžku, akú majú medzi sebou vzdialenosť niektoré z vrcholov kocky. Takéto vzdialenosti sú len tri rôzne – buď majú vrcholy medzi sebou vzdialenosť rovnú dĺžke hrany kocky, alebo uhlopriečky steny kocky, alebo telesovej uhlopriečky kocky.

Pravidelný štvorsten s hranou rovnou hrane kocky určite neexistuje (odôvodniť to vieme napríklad tým, že stena pravidelného štvorstena je rovnostranný trojuholník a hrany kocky vždy zvierajú pravý uhol). Zároveň telesové uhlopriečky má kocka práve štyri, čo nie je dostatočný počet hrán na štvorsten. Preto musia mať štvorsteny v tejto úlohe nutne hranu rovnú uhlopriečke steny kocky. Takéto štvorsteny existujú práve dva ($ACFH$ a $BDEG$).

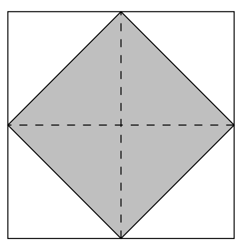


Všimnime si, že v každej stene je položená práve jedna hrana každého zo štvorstenov a hrany ležiace v tej istej stene sa vždy pretínajú v strede steny (ide o priesečník uhlopriečok štvorca). To sú jediné body stien kocky, ktoré ležia v prieniku dvoch štvorstenov. Tieto stredy určujú hrany tvoriace teleso, ktoré dostávame prienikom štvorstenov.



To, aké teleso vznikne, si vieme predstaviť aj postupným rezaním kocky. Kocku môžeme rezať po „stenách“ štvorstenov – jedným takým rezom dostaneme dve časti kocky, v jednej z týchto častí sa určite nebude nachádzať žiaden bod toho štvorstenu, pozdĺž ktorého steny sme rezali, túto časť odstránime. Keď tento postup aplikujeme na všetkých osem stien štvorstenov, zvýši nám teleso, ktoré je určite súčasťou oboch štvorstenov, teda požadovaný prienik.

Vzniknuté teleso je pravidelným osemstenom, ktorý si vieme rozdeliť horizontálne na dva štvorboké ihlany. Podstava takého ihlana má presne polovičný obsah oproti stene kocky (lebo je to štvorec, ktorého vrcholy ležia v stredoch stien kocky – na obrázku je znázornený horizontálny rez kocky v polovici jej výšky).



Výška takého ihlanu je rovná polovici výšky kocky. Výpočtom objemu ihlanu dostávame, že objem telesa tvoreného prienikom dvoch štvorstenov je

$$2 \cdot (\frac{1}{3} \cdot S_{podstava} \cdot v) = 2 \cdot (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) = \frac{1}{6}.$$

Úloha 1.10: Martinova zásuvka obsahuje iba čierne a biele ponožky, spolu menej ako 50 ponožiek. Ak vytiahne dve ponožky náhodne, pravdepodobnosť, že dostane pár rovnakej farby, je 0,5. Aký je najväčší počet čiernych ponožiek, ktoré môže mať v zásuvke?

Výsledok: 28

Riešenie: Keď Martin vytiahne dve ponožky, tak môžu nastať dve situácie: buď dostane pár rovnakej farby, alebo bude jedna ponožka biela a druhá čierna. Zo zadania pravdepodobnosť, že dostane pár rovnakej farby, je 0,5, preto aj pravdepodobnosť doplnku, že dostane dve rôzne ponožky, je 0,5. Takže si môžeme tieto dve pravdepodobnosti vyjadriť a dať ich do rovnosti.

Označme si počet bielych ponožiek ako b a počet čiernych ponožiek ako c. Potom pravdepodobnosť, že Martin vytiahne dve biele ponožky, vypočítame ako pravdepodobnosť, že prvá ponožka je biela, vynásobenú s pravdepodobnosťou, že druhá ponožka je biela:

$$\frac{b}{b+c}\cdot\frac{b-1}{b+c-1}.$$

Analogicky pravdepodobnosť vytiahnutia dvoch čiernych ponožiek je

$$\frac{c}{b+c}\cdot\frac{c-1}{b+c-1}.$$

Výsledná pravdepodobnosť vytiahnutia dvoch ponožiek rovnakej farby je súčet týchto dvoch pravdepodobností. Pravdepodobnosť, že si vytiahne dve rôzne ponožky sa vypočíta ako súčet pravdepodobnosti, že si ako prvú vytiahne bielu a ako druhú čiernu ponožku, s pravdepodobnosťou, že si ako prvú vytiahne čiernu a ako druhú bielu ponožku:

$$\frac{b}{b+c}\cdot\frac{c}{b+c-1}+\frac{c}{b+c}\cdot\frac{b}{b+c-1}.$$

Teraz si tieto pravdepodobnosti dáme do rovnosti a upravujeme:

$$\begin{aligned}
\frac{b}{b+c}\cdot\frac{b-1}{b+c-1}+\frac{c}{b+c}\cdot\frac{c-1}{b+c-1} &= \frac{b}{b+c}\cdot\frac{c}{b+c-1}+\frac{c}{b+c}\cdot\frac{b}{b+c-1}\\
\frac{b\cdot(b-1)+c\cdot(c-1)}{(b+c)\cdot(b+c-1)} &= \frac{2bc}{(b+c)\cdot(b+c-1)}\\
b\cdot(b-1)+c\cdot(c-1) &= 2bc\\
b^2-b+c^2-c-2bc &= 0\\
(b-c)^2-b-c &= 0\\
(b-c)^2 &= b+c
\end{aligned}$$

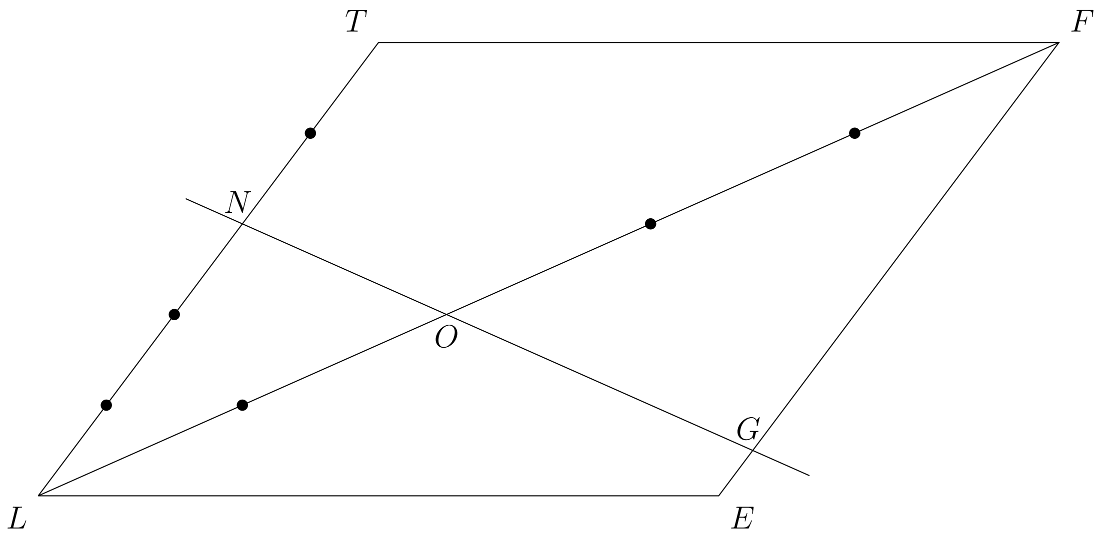
Zo zadania vieme, že dokopy je v zásuvke menej ako 50 ponožiek, teda $b+c$ je maximálne 49. Zároveň 49 je druhá mocnina. Ak $b+c=49$, tak $|b-c|=7$. Z toho vieme dopočítať, že b je 21 alebo 28. Ak by bol celkový počet ponožiek menšie číslo, tak aj maximálny počet čiernych ponožiek by bol menší, teda žiadna z ďalších možností – druhých mocnín menších ako 49 – nám nedá väčší počet čiernych ponožiek ako 28.

Najväčší počet čiernych ponožiek je 28.

Úloha 1.11: Daný je rovnobežník $LEFT$ s obsahom 100. Na úsečke LT leží bod N taký, že $|LN| : |NT| = 3 : 2$. Na úsečke LF leží bod O taký, že $|LO| : |OF| = 2 : 3$. Priamka NO pretína úsečku EF v bode G. Aký je obsah štvoruholníka $LEGO$?

Výsledok: 23

Riešenie:



Keďže $LEFT$ je rovnobežník, jeho uhlopriečka LF ho rozdeľuje na dva zhodné trojuholníky. Keďže $LEFT$ má obsah 100, LFT bude mať obsah polovičný, čiže 50.

Vypočítajme obsah LON. Uvažujme LF ako základňu LFT a LO ako základňu LON. Potom veľkosť základne LO je rovná $2/5$ základne $|LF|$ a vďaka pomeru LN a LT je výška LON rovná $3/5$ výšky LFT. Obsah trojuholníka LNO obdržíme ako $50 \cdot 2/5 \cdot 3/5 = 12$.

Uhly LON a FOG sú vrcholové. Zároveň uhly OLN a OFG sú striedavé z rovnobežnosti LE a FT. Trojuholníky LON a FOG sú teda podobné podľa vety usu. Pomer podobnosti vieme zo zadania, je to pomer $|LO| : |OF| = 2 : 3$.

Teraz môžeme vypočítať obsah trojuholníka FOG. Jeho výška a základňa sú $3/2$ výšky a základne trojuholníka LON. Jeho obsah teda bude $(3/2)^2 = 9/4$ obsahu LON, čiže $12 \cdot 9/4 = 27$.

Trojuholník LEF má obsah 50 (rovnako ako LFT) a skladá sa z trojuholníka FOG a štvoruholníka $LEGO$. Trojuholník FOG má obsah 27, takže štvoruholník $LEGO$ má obsah $50 - 27 = 23$.

Úloha 1.12: Vyberieme náhodne pár reálnych čísel (a, b), ktoré spĺňajú $a^2 + b^2 \leq 1/4$. Aká je pravdepodobnosť, že krivky dané rovnicami $y = ax^2 + 2bx - a$, $y = x^2$ sa pretínajú?

Výsledok: $\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6\pi}$

Riešenie: Dve krivky sa pretínajú práve vtedy, keď existuje bod, ktorý im obom patrí. Bod patrí krivke vtedy, keď jeho súradnice spĺňajú rovnicu, ktorá ju definuje. Krivky zo zadania sa teda pretínajú práve vtedy, keď existujú súradnice $[x, y]$, ktoré spĺňajú obe zadané rovnice, to jest túto sústavu:

$$\begin{aligned} y &= ax^2 + 2bx - a \\ y &= x^2 \end{aligned}$$

Odčítame druhú rovnicu od prvej:

$$0 = (a-1)x^2 + 2bx - a$$

Kvadratická rovnica má riešenie práve vtedy, keď jej diskriminant je nezáporný:

$$\begin{aligned}4b^2 + 4a(a-1) &\geq 0\\ b^2 + a^2 - a &\geq 0\end{aligned}$$

Ďalej nájdime množinu dvojíc reálnych čísel (a, b), spĺňajúcich podmienku $a^2 + b^2 \leq 1/4$. Obe strany nerovnosti sú kladné, teda ich môžeme odmocniť a dostaneme ekvivalentnú podmienku:

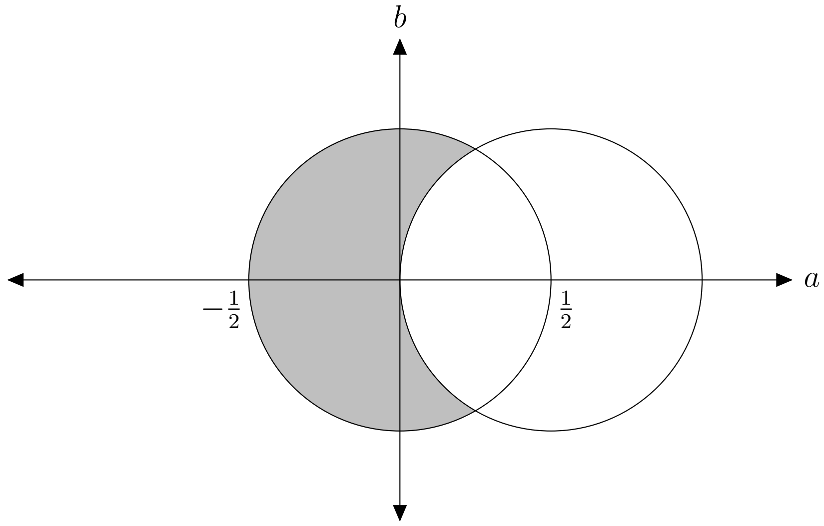
$$\sqrt{a^2 + b^2} \leq 1/2$$

Zaveďme systém súradníc s osami a, b. Z Pytagorovej vety vyplýva, že v ňom hodnota $\sqrt{a^2 + b^2}$ vyjadruje vzdialenosť bodu $[a, b]$ od bodu $[0, 0]$. Táto vzdialenosť je zhora ohraničená číslom $1/2$. Všetky hľadané body teda ležia v kruhu so stredom v bode $[0, 0]$ a polomerom $1/2$.

Z nich vyhovujúce body musia spĺňať aj podmienku $b^2 + a^2 - a \geq 0$, ktorú vieme ďalej upraviť:

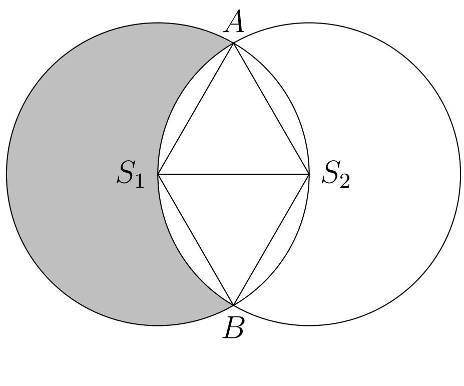
$$\begin{aligned}b^2 + a^2 - a + 1/4 &\geq 1/4\\ b^2 + (a - 1/2)^2 &\geq 1/4\\ \sqrt{b^2 + (a - 1/2)^2} &\geq 1/2\end{aligned}$$

Ľavá strana vyjadruje vzdialenosť bodu $[a, b]$ od bodu $[1/2, 0]$. Keďže musí byť aspoň $1/2$, tak všetky vyhovujúce body ležia mimo vnútra kruhu so stredom $[1/2, 0]$ a polomerom $1/2$.



Hľadanú pravdepodobnosť geometricky vyjadruje pomer obsahu vyhovujúcej, zafarbenej oblasti k obsahu celého uvažovaného kruhu.

Pomenujme stredy kruhov S_1 a S_2 ako na druhom obrázku. Priesečníky kružníc pomenujme A a B. Obsah kruhu so stredom S_1 je rovný $\pi(1/2)^2 = \pi/4$. Obsah jeho zafarbenej časti vyrátame odrátaním obsahu nezafarbenej časti od celého obsahu.



Platí $|AS_1| = |AS_2| = |S_1S_2| = |BS_1| = |BS_2| = 1/2$, keďže všetky spomenuté úsečky sú polomermi kruhov. Z toho vyplýva, že trojuholníky S_1S_2A a S_1S_2B sú rovnostranné so stranou dĺžky $1/2$. Z $(\sqrt{3}/2) \cdot (1/2) = \sqrt{3}/4$. Jeho obsah je potom $\sqrt{3}/16$, a teda obsah oboch rovnostranných trojuholníkov dokopy je $\sqrt{3}/8$.

V nezafarbenej oblasti sú okrem dvoch trojuholníkov aj štyri zhodné kruhové odseky. Zistime obsah jedného z nich, napríklad toho určeného priamkou AS_2. Vieme, že obsah kruhového výseku AS_1S_2 je rovný

$$\frac{60^\circ}{360^\circ} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{24},$$

keďže veľkosť uhla AS_1S_2 je 60° a obsah celého kruhu je $\pi/4$. Keď od obsahu tohto výseku odrátame obsah trojuholníka S_1S_2A, dostaneme hľadaný obsah kruhového odseku, ktorý je teda rovný

$$\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{16} = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{48}.$$

Obsah všetkých štyroch odsekov dokopy je preto

$$\frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}.$$

Obsah celej nezafarbenej oblasti tak vyjadruje súčet

$$\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} = \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{24}.$$

Odčítaním od obsahu celého kruhu dostávame obsah zafarbenej oblasti rovný

$$\frac{\pi}{4} - \frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{24} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{24}.$$

Finálna pravdepodobnosť je pomerom tohto obsahu k obsahu celého kruhu:

$$\frac{\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{24}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6\pi}$$

2. časť

Úloha 2.1: Váza plná vody váži 7 kilogramov. Keď z vázy vylejeme 3/5 vody, váži už len 3 kilogramy. Koľko kilogramov váži prázdna váza?

Výsledok: 1/3

Riešenie: Podľa zadania si zostavíme sústavu dvoch rovníc, kde a označuje hmotnosť vázy a b hmotnosť vody:

$$a + b = 7 \qquad \text{(Váza plná vody.)}$$
$$a + 2b/5 = 3 \qquad \text{(Váza bez 3/5 vody.)}$$

Keď druhú rovnicu vynásobíme -1 a rovnice sčítame, dostaneme $3b/5 = 4$. Keď túto rovnicu potom vynásobíme 5 a vydelíme 3, dostaneme $b = 20/3$. Túto hodnotu b dosadíme do prvej rovnice: $a + 20/3 = 7$, $a = 21/3 - 20/3$. Po vyčíslení dostaneme, že prázdna váza váži 1/3 kilogramu.

Úloha 2.2: Nájdite všetky prvočísla, ktorých dvadsaťnásobok je druhou mocninou celého čísla.

Výsledok: 5

Riešenie: Vieme, že v prvočíselnom rozklade druhej mocniny musia byť všetky prvočísla umocnené na párne exponenty. Keď sa pozrieme na prvočíselný rozklad 20, $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$. Vidíme, že 2 je v ňom umocnená na párny exponent, ale 5 nie. Z toho vyplýva, že aby súčin 20 a prvočísla bol druhou mocninou celého čísla, musí toto prvočíslo v svojom prvočíselnom rozklade obsahovať nepárny počet 5. Z prvočísel je takýmto číslom len 5, a teda to je aj jediným riešením úlohy.

Úloha 2.3: Vypočítajte aritmetický priemer čísel 9, 99, 999, ..., 999 999 999.

Výsledok: 123 456 789

Riešenie: Keď chceme vypočítať aritmetický priemer deviatich čísel 9, 99, 999, ..., 999 999 999, tak chceme určiť hodnotu výrazu:

$$\frac{9 + 99 + 999 + \cdots + 999999999}{9}.$$

Každé číslo v čitateli si vieme vyjadriť ako súčin čísla 9 a čísla tvoreného niekoľkými jednotkami (napríklad 999 ako $9 \cdot 111$). Potom môžeme pôvodný výraz upraviť na:

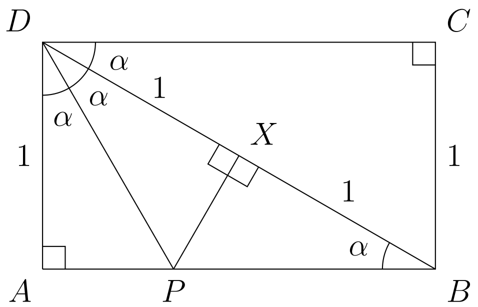
$$\frac{9 \cdot 1 + 9 \cdot 11 + \cdots + 9 \cdot 111111111}{9} = \frac{9(1 + 11 + \cdots + 111111111)}{9} = 1 + 11 + \cdots + 111111111.$$

Teraz si už iba stačí uvedomiť, že $1 + 11 + \cdots + 111111111 = 123456789$.

Úloha 2.4: V obdĺžniku $ABCD$ má strana AD dĺžku 1, bod P leží na strane AB a úsečky DB a DP delia uhol ADC na tretiny. Aký je obsah trojuholníka BDP?

Výsledok: $1/\sqrt{3}$

Riešenie: Nech uhly ADP, PDB a BDC majú veľkosť α. Trojuholníky BCD a PAD sú zjavne podobné (podľa vety uu). Uhly BDC a DBA sú striedavé, takže aj uhol DBA bude mať veľkosť α. Výška rovnoramenného trojuholníka BDP z bodu P na stranu BD ho rozdelí na dva zhodné trojuholníky. Pätu tejto výšky pomenujme X. Trojuholníky PXD a PAD sú zhodné, pretože majú dva uhly rovnakých veľkostí a spoločnú stranu PD. Potom aj trojuholník PXB je s nimi zhodný. Úsečky BX aj XD teda budú mať dĺžku 1, takže uhlopriečka BD má dĺžku 2. Potom strana AB má dĺžku $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Obsah obdĺžnika $ABCD$ je $\sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}$, obsah trojuholníka ABD je polovica, to jest $\sqrt{3}/2$. Keďže trojuholník ABD je zložený z troch zhodných trojuholníkov, BDP bude tvoriť $2/3$ trojuholníka ABD, čiže jeho obsah bude $\sqrt{3}/2 \cdot 2/3 = \sqrt{3}/3 = 1/\sqrt{3}$.



Úloha 2.5: V Nižnej Kreslenej žije taký počet obyvateľov, že jeho tretina je druhou mocninou nejakého prirodzeného čísla a jeho polovica treťou mocninou iného prirodzeného čísla. Zároveň je počet Nižnokreslenčanov najmenšie také kladné celé číslo. Koľko obyvateľov má obec Nižná Kreslená?

Výsledok: 432

Riešenie: Označme si počet obyvateľov Nižnej Kreslenej ako n. Ďalej si označme počty výskytov prvočísel 2 a 3 v prvočíselnom rozklade čísla n ako p_2 a p_3.

Exponenty prvočísel 2 a 3 v rozklade čísla $n/3$ sú p_2 a $(p_3 - 1)$. Keďže je číslo $n/3$ druhou mocninou prirodzeného čísla, oba musia byť násobkom dvojky. Preto p_2 je párne a p_3 nepárne. Podobne exponenty prvočísel 2 a 3 v rozklade čísla $n/2$ sú $(p_2 - 1)$ a p_3. Keďže je číslo $n/2$ treťou mocninou prirodzeného čísla, oba musia byť násobkom trojky. Preto p_2 dáva zvyšok 1 po delení tromi a p_3 je deliteľné tromi.

Číslo p_2 je párne so zvyškom 1 po delení tromi. Najmenšie prirodzené číslo s týmito vlastnosťami je 4, teda $p_2 \geq 4$. Číslo p_3 je nepárne a deliteľné tromi. Najmenšie prirodzené číslo s týmito vlastnosťami je 3, teda $p_3 \geq 3$. Takže $n \geq 2^4 \cdot 3^3$. Číslo $2^4 \cdot 3^3$ zároveň spĺňa podmienku zo zadania:

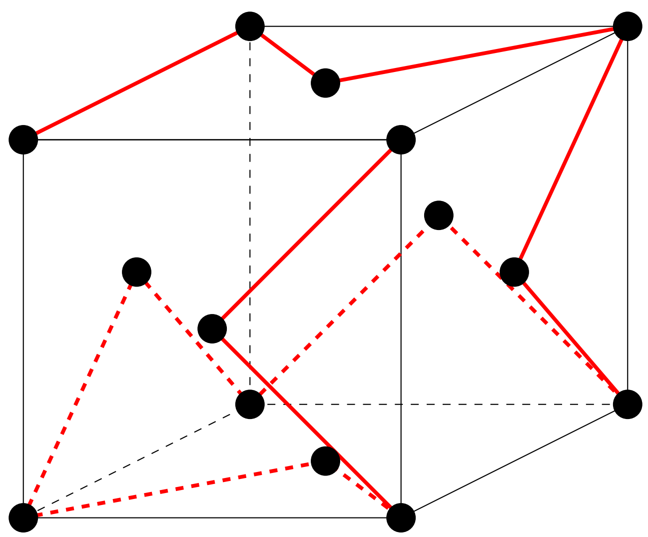
$$\frac{2^4 \cdot 3^3}{3} = 2^4 \cdot 3^2 = (2^2 \cdot 3)^2$$
$$\frac{2^4 \cdot 3^3}{2} = 2^3 \cdot 3^3 = (2 \cdot 3)^3$$

Úloha 2.6: Mravec si chce popozerať celú hraciu kocku. Svoju púť začína vo vrchole a počas púte chce navštíviť každý vrchol a stred každej zo stien. Akú najmenšiu vzdialenosť musí prejsť, ak má kocka dĺžku hrany 2 cm?

Výsledok: $(2 + 12 \cdot \sqrt{2})$ cm

Riešenie: Najkratšia úsečka, ktorá spája dva body z tých, ktoré chce mravec navštíviť, je úsečka, ktorá spája vrchol kocky a stred steny, ktorej tento vrchol patrí. Pomocou Pytagorovej vety vieme dorátať, že takáto úsečka meria $\sqrt{2}$ cm (ide o polovicu z uhlopriečky dlhej $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$).

Dokopy chceme spojiť 8 vrcholov a 6 stredov stien. Ak začneme vo vrchole, vieme vytvoriť neprerušovanú cestu, na ktorej sa postupne striedajú vrcholy a hrany. Takáto cesta má dĺžku $12 \cdot \sqrt{2}$ a spojí 7 vrcholov a 6 stredov stien. Z toho vyplýva, že sme skončili vo vrchole a ostal nám ešte jeden vrchol. Tieto dva vrcholy už spojíme jednoducho hranou kocky. Takýmto spôsobom mravec prejde $2 + 12 \cdot \sqrt{2}$ cm. Nakoniec overíme, že takúto cestu vieme na kocke skonštruovať, napríklad pomocou obrázka.



Úloha 2.7: Nájdite počet racionálnych čísel r takých, že $0 < r < 1$ a súčet čitateľa a menovateľa čísla r v základnom tvare je 1000.

Výsledok: 200

Riešenie: Základný tvar každého hľadaného čísla r je zlomok m/n, kde m a n sú nesúdeliteľné celé čísla, $0 < m < n$ a $m + n = 1000$. Keďže $n = 1000 - m$, podmienky nesúdeliteľnosti a usporiadania sú pre celé číslo m splnené práve vtedy, keď $0 < m < 1000 - m$, to jest $0 < m < 500$ a m je nesúdeliteľné s $1000 - m$, to jest m je nesúdeliteľné s 1000.

Zostáva spočítať čísla menšie ako 500 nesúdeliteľné s 1000. Číslo je nesúdeliteľné s 1000 práve vtedy, keď nie je deliteľné ani jedným z jeho prvočíselných deliteľov, to jest 2 ani 5. Každé druhé celé číslo je nepárne a štyri z každých piatich po sebe idúcich celých čísel sú nedeliteľné piatimi, vo výsledku dostaneme $500 \cdot (1/2) \cdot (4/5) = 200$ čísel pod 500 nedeliteľných ani jedným. (O korektnosti tohto násobenia sa možno presvedčiť napríklad tým, že z každých desiatich po sebe idúcich prirodzených čísel sú štyri – tie so zvyškami 1, 3, 7, 9 po delení desiatimi – nedeliteľné dvomi ani piatimi.)

Poznámka: Pri riešení tejto úlohy sme využili vzorec, ktorý platí všeobecne. Ak prirodzené číslo n má vo svojom prvočíselnom rozklade práve k rôznych prvočísel, ktoré označíme p_1 až p_k, tak počet nezáporných celých čísel nepresahujúcich n (kratšie povedané zvyškov po delení n) nesúdeliteľných s n je

$$n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Úloha 2.8: Parabolický kartár vie čítať karty, na ktorých sú napísané reálne čísla, a robiť s nimi dve operácie. Keď mu dám jednu kartu s číslom A, vráti mi ju a vytlačí novú kartu, na ktorej je číslo $A+1$. Keď mu dám dve karty s číslami B a C v tomto poradí, vráti mi ich a vytlačí nové nanajvýš dve karty, na ktorých sú reálne korene polynómu $x^2 + Bx + C$ (podľa počtu koreňov môže vytlačiť iba jednu alebo žiadnu novú kartu). Mám iba jednu kartu, a to 361. Na koľko najmenej operácií viem obdržať kartu 19?

Výsledok: 4

Riešenie: Vieme, že $361 = 19^2$. Ak teda chceme dostať kartu s číslom 19, tak nám stačí dostať karty také, aby sme mohli použiť rovnicu $x^2+Bx+C = 0$ ako $x^2-361 = 0$. Na to by sme potrebovali karty s číslami 0 a -361. Kartu s číslom 0 vieme získať buď ako $A+1$ pomocou karty s číslom -1, alebo ako jeden z koreňov $x^2+Bx+C = 0$. Pozrime sa, aké karty by na to bolo treba. Ak si nulu dosadíme za x, dostávame $0^2 + B\cdot 0 + C = 0$. Na to, aby sme dostali nulu ako koreň kvadratickej rovnice, sa musí $C = 0$, takže by sme už kartu s číslom 0 potrebovali mať. Teda na získanie karty s číslom 0 musíme nejako získať kartu s číslom -1 a zväčšiť ju pomocou $A+1$. Ostáva nám získať karty -1 a -361. Môžeme použiť $x^2 + Bx + C = 0$, konkrétne $(x + 361)(x + 1) = 0$, čo je po roznásobení $x^2 + 362x + 361 = 0$. Keďže s kartou 361 začíname, kartu 362 vieme získať pomocou $A+1$.

Na získanie čísla 19 teda stačia štyri kroky:

$$\begin{array}{lrcl}
1. & 361 & \longrightarrow & 362\\
2. & 362,\, 361 & \longrightarrow & -361,\, -1\\
3. & -1 & \longrightarrow & 0\\
4. & 0,\, -361 & \longrightarrow & -19,\, 19
\end{array}$$

No existuje aj riešenie na menej krokov? Či stačia tri operácie na získanie karty 19, zistíme tak, že preskúmame, aké všetky karty vieme obdržať za prvé dva ťahy, a overíme, či sa tretím ťahom dá dosiahnuť 19.

Ak niekedy použijeme $A+1$ na kartu s číslom 361, bez ujmy na všeobecnosti to spravíme v prvom kroku, keďže jedinú kartu potrebnú na túto operáciu máme už na začiatku. Po takomto kroku môžeme v ďalšom získať opäť pomocou $A+1$ získať kartu s číslom $362+1 = 363$ alebo použiť $x^2+Bx+C = 0$ na karty, ktoré už máme. Tým sa dajú získať tieto karty:

$$\begin{array}{ccccc}
B & C & \longrightarrow & \dfrac{-B-\sqrt{D}}{2} & \dfrac{-B+\sqrt{D}}{2}\\
\hline
361 & 361 & \longrightarrow & \dfrac{-19^2-19\sqrt{357}}{2} & \dfrac{-19^2+19\sqrt{357}}{2}\\
362 & 362 & \longrightarrow & -181-\sqrt{32399} & -181+\sqrt{32399}\\
362 & 361 & \longrightarrow & -19^2 & -1\\
361 & 362 & \longrightarrow & \dfrac{-19^2-\sqrt{128873}}{2} & \dfrac{-19^2+\sqrt{128873}}{2}
\end{array}$$

Teraz chceme overiť, či vieme v treťom kroku získať kartu s číslom 19. Ak by sme chceli použiť $A+1$, potrebovali by sme na to kartu s číslom $19 - 1 = 18$. S pomocou $x^2 - Bx + C = 0$ by sme chceli dostať karty s číslami 19 a z, tak by sme na to potrebovali karty s číslami, ktoré by boli koeficientmi polynómu $(x - 19)(x - z) = x^2 - (19 + z)x + 19z$, čiže karty s číslami $-19 - z$ a $19z$. To znamená, že spolu s kartou s číslom K potrebujeme použiť kartu s číslom $-19(K + 19)$ alebo $-K/19 - 19$. Dokopy v treťom kroku vieme získať číslo 19 práve vtedy, keď po druhom kroku máme kartu s číslom 18 alebo máme kartu s nejakým číslom K a zároveň kartu $-19(K+19)$ alebo $-K/19-19$. Spĺňame túto podmienku?

K	$-19(K+19)$	$-\dfrac{K}{19}-19$
361	$-19^2\cdot 20$	-38
362	$-19\cdot 381$	$-\dfrac{723}{19}$
363	$-19\cdot 382$	$-\dfrac{724}{19}$
$\dfrac{-19^2\pm 19\sqrt{357}}{2}$	$\dfrac{19^2\cdot 17\mp 19^2\sqrt{357}}{2}$	$\dfrac{-19\mp\sqrt{357}}{2}$
$-181\pm\sqrt{32399}$	$19\cdot 162\mp 19\sqrt{32399}$	$\dfrac{-180\mp\sqrt{32399}}{19}$
-361	$19^2\cdot 18$	0
-1	$-19\cdot 18$	$-\dfrac{360}{19}$
$\dfrac{-19^2\pm\sqrt{128873}}{2}$	$\dfrac{19^2\cdot 17\mp 19\sqrt{128873}}{2}$	$-\dfrac{19}{2}\mp\dfrac{\sqrt{128873}}{2\cdot 19}$

Už sme vedeli, že nemáme číslo 18. Zároveň ani jedno číslo z druhého alebo tretieho stĺpca sa nevyskytuje v prvom, teda nemáme k dispozícii potrebné číslo tvaru $-19(K+19)$ alebo $-K/19-19$. Kartu s číslom 19 v treťom kroku získať nevieme.

Ostáva preskúmať druhú možnosť – že nezískame kartu s číslom 362 operáciou pomocou $A+1$. V takom prípade v prvom ťahu získavame nutne karty $(-19^2\pm 19\sqrt{357})/2$. Zvyšok výpočtu prebehne rovnakou metódou, opäť vypíšeme všetky čísla, ktoré možno získať v druhom kroku, a overíme, že do 19 sa v treťom netrafíme.

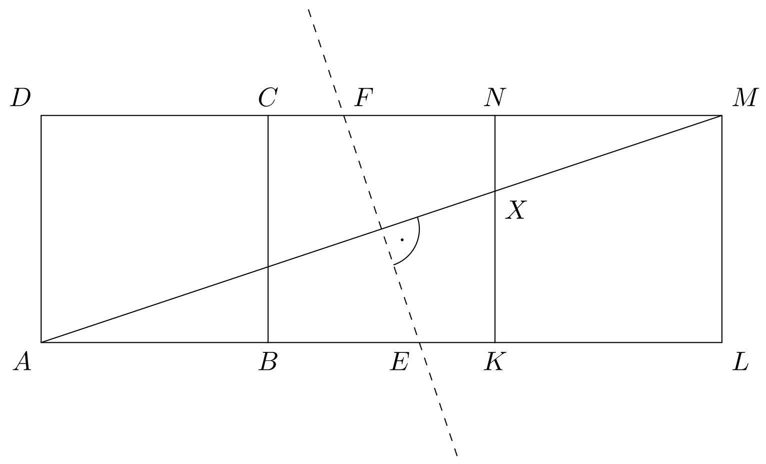
Úloha 2.9: Prehneme papier v tvare obdĺžnika, ktorého jedna strana je trikrát dlhšia ako druhá strana, tak, že jeden roh položíme na protiľahlý roh, čím nám vznikne päťuholník. Aký je obsah tohto päťuholníka, ak obsah pôvodného obdĺžnika je 1?

Výsledok: 13/18

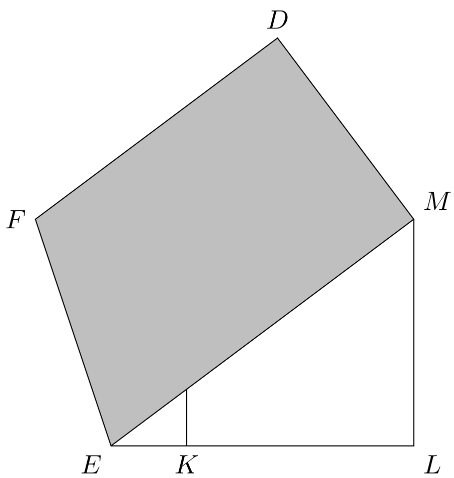
Riešenie: Keďže je jedna strana je trikrát dlhšia ako druhá, môžeme si papier znázorniť ako tri vedľa seba ležiace štvorce (postupne ich označme $ABCD$, $BKNC$ a $KLMN$). Bez ujmy na všeobecnosti budeme pokladať vrchol A na vrchol M. Ohyb papiera znázorníme priamkou, ktorá je kolmá na úsečku AM a prechádza jej stredom, jej priesečníky s úsečkami AL a MD označme postupne E a F.

Priesečník AM a KN označme X. Úsečka AM delí úsečku KN v pomere $2:1$ (to vieme odôvodniť napríklad podobnosťou trojuholníkov AKX a MNX podľa uu – striedavé uhly pri vrcholoch M a A, pravé uhly pri vrcholoch K a N a pomer strán dostávame z pomeru AK k MN).

Rotáciou štvorca $BKNC$ o 90° v smere hodinových ručičiek okolo jeho stredu sa zobrazí bod X do E (keďže AM a EF zvierajú pravý uhol). Z toho vyplýva, že E rozdeľuje úsečku BK v pomere $2:1$.



Po prehnutí si pre výpočet obsahu obrázok rozdelíme na sivú a bielu časť (ako na obrázku – môže nám pomôcť predstaviť si, že spodná strana papiera je sivá a po prehnutí ju priamo vidíme). Sivá časť je zjavne polovica celého obsahu papiera, teda 1/2. Bielu časť dopočítame jednoducho ako obsah trojuholníka – vieme, že bod E ležal v dvoch tretinách strany BK, celkovo teda ležal v piatich devätinách úsečky AL. Z toho vyplýva, že ak obdĺžnik $ALMN$ má obsah 1, obdĺžnik so stranami EL a LM bude mať obsah 4/9.



Trojuholník ELM má presne polovicu z tohto obdĺžnika, čo sú 2/9. Keď k tomu pripočítame sivú časť, dostávame dokopy

$$\frac{2}{9} + \frac{1}{2} = \frac{4}{18} + \frac{9}{18} = \frac{13}{18}.$$

Úloha 2.10: Majme šachovnicu 8×8 a na nej v ľavom dolnom políčku figúrku. Figúrka sa môže pohybovať o jedno políčko doprava alebo hore. Okrem toho sa môže najviac jedenkrát pohnúť o jedno políčko doľava alebo dole. Koľkými rôznymi cestami vie skončiť v pravom hornom políčku?

Výsledok: $2 \cdot 7 \cdot \binom{16}{9} + \binom{14}{7} = 163592$

Riešenie: Rozdeľme si všetky cesty do troch skupín podľa toho, či obsahujú krok doľava, krok dole, alebo ani jeden z nich.

Ak cesta neobsahuje ani jeden z nich, tak platí, že aby figúrka skončila v pravom hornom políčku, musí počas svojej cesty spraviť práve 7 krokov doprava a 7 krokov hore. Tieto kroky môže robiť v ľubovoľnom poradí. Počet ich zoradení vyjadruje kombinačné číslo $\binom{14}{7} = \frac{14!}{7! \cdot 7!} = 3432$ (keďže zo 14 krokov vyberáme 7 krokov doprava alebo ekvivalentne 7 krokov hore).

Ak cesta obsahuje krok doľava, tak musí figúrka spraviť dokopy 8 krokov doprava, 1 krok doľava a 7 krokov hore. Uvažujme len vzájomné poradie krokov doprava a doľava. Krok doľava nemôže byť prvý ani posledný, keďže potom by figúrka vyšla von zo šachovnice. Okrem toho môže byť umiestnený ľubovoľne, teda existuje 7 rôznych zoradení. Každé z nich je dlhé 9 krokov a kroky každého z nich vieme ľubovoľne premiešať s krokmi smerom hore, aby sme dostali úplné cesty. Počet možností, koľkými sa dá urobiť toto premiešanie, vyjadruje kombinačné číslo $\binom{16}{7} = \frac{16!}{9! \cdot 7!} = 11440$ (keďže zo 16 krokov vyberáme 7 krokov smerom hore). Tento počet možností existuje pre každé zo siedmich zoradení, celkovo je teda $7 \cdot 11440 = 80080$ ciest.

Zo symetrie šachovnice vyplýva, že počet ciest s krokom dole je rovnaký ako počet ciest s krokom doľava – tiež 80080.

Všetkých ciest dokopy je $3432 + 80080 + 80080 = 163592$.

Úloha 2.11: Koľko existuje šesťciferných čísel takých, že po odstránení ľubovoľnej cifry vznikne päťciferné číslo deliteľné 7?

Výsledok: 16

Riešenie: Majme šesťciferné číslo $\overline{abcdef}$, z ktorého ak odstránime akúkoľvek cifru, tak výsledné číslo (napríklad $\overline{abcde}$) bude päťciferné deliteľné siedmimi. O takomto $\overline{abcdef}$ vieme určite nasledovné:

- Prvá cifra (a) musí byť nenulová.
- Druhá cifra (b) musí byť nenulová, aby po prípadnom odstránení cifry a bolo číslo $\overline{bcdef}$ päťciferné.

Vezmime si nejakú dvojicu čísel, ktoré sme vytvorili odstránením cifier z $\overline{abcdef}$, napríklad $\overline{acdef}$ a $\overline{bcdef}$, a uvažujme, že obe tieto čísla budú deliteľné siedmimi. Odčítajme teraz od väčšieho z nich to menšie. Dostávame tak číslo $\overline{|a-b|0000}$. Z vlastností modula vieme, že ak sú čísla $\overline{acdef}$ aj $\overline{bcdef}$ deliteľné siedmimi, aj ich rozdiel musí byť deliteľný siedmimi, čiže $|a - b|$ musí byť rovné 0 alebo 7. Rovnaká vlastnosť musí platiť pre všetky dvojice čísel, teda ak odstránime ľubovoľné dve číslice z pôvodného čísla $\overline{abcdef}$.

Pozrime sa na prípad, že $a - b = 7$. Číslo $\overline{abcdef}$ môže obsahovať nanajvýš dve rôzne cifry. To preto, lebo ak by obsahovalo aj iné cifry, tak by neplatila vyššie spomínaná vlastnosť pre všetky dvojice takých čísel.

Vezmime si dekadický zápis päťciferného čísla modulo 7.

$$10000a + 1000b + 100c + 10d + e \equiv 4a + 6b + 2c + 3d + e \pmod 7$$

Keďže číslo $\overline{abcdef}$ môže obsahovať iba cifry s rovnakým zvyškom po delení 7, tak si vieme tento dekadický zápis zjednodušiť:

$$4a + 6b + 2c + 3d + e \equiv 4a + 6a + 2a + 3a + a = 16a \equiv 2a \pmod 7$$

Čísla, ktoré vzniknú odstránením cifry z čísla $\overline{abcdef}$, budú deliteľné siedmimi práve vtedy, keď aj $2a$, teda práve vtedy, keď číslo $\overline{abcdef}$ bude obsahovať iba cifry 0 a 7.

Koľko takýchto čísel $\overline{abcdef}$ existuje? Prvé dve cifry musia byť nenulové, takže na prvé dve miesta príde cifra 7 ($\overline{77cdef}$). Pre každú zo zvyšných cifier ($\overline{cdef}$) máme práve dve možnosti, akú cifru vieme použiť (buď 0 alebo 7). Dokopy dostávame $2^4 = 16$ rôznych možných čísel, ktoré vyhovujú podmienkam.

Úloha 2.12: Postupnosť $(x_1, x_2, \dots)$ je definovaná nasledovne: $x_1 = 17$, $x_2 = 93$, $x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}$ pre všetky $n \geq 1$. Nájdite najmenšiu hodnotu k, pre ktorú platí $x_k = 0$.

Výsledok: 1583

Riešenie: Úpravou predpisu zo zadania získame, že pre všetky $n \geq 1$ platí $x_{n+2} \cdot x_{n+1} = x_n \cdot x_{n+1} - 1$.

Definujme postupnosť $(y_1, y_2, \dots)$ tak, že pre všetky $n \geq 1$ platí $y_n = x_{n+1} \cdot x_n$. Z toho potom vyplýva, že pre všetky $n \geq 1$ vieme vzťah $x_{n+2} \cdot x_{n+1} = x_n \cdot x_{n+1} - 1$ prepísať na $y_{n+1} = y_n - 1$.

Teraz sa pozrime na to, pre akú najmenšiu hodnotu k platí $y_k = 0$. Z definície tejto postupnosti $y_1 = x_2 \cdot x_1 = 93 \cdot 17 = 1581$. Keďže pre $n \geq 1$ platí vzťah $y_{n+1} = y_n - 1$, tak hľadaný člen je $y_{1582} = 0$ ($y_1 = 1581$, $y_2 = 1580$, $y_3 = 1579$, $\dots$, $y_{1581} = 1$).

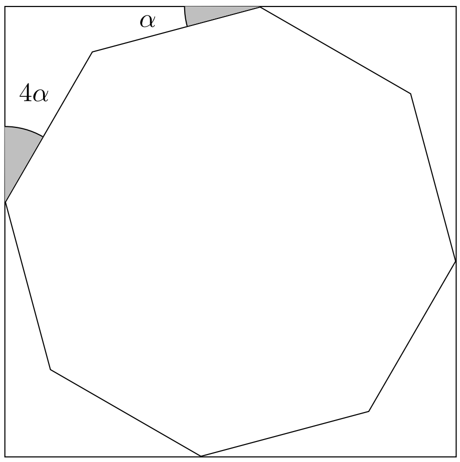
Práve sme dokázali, že pre všetky prirodzené čísla $1 \leq k \leq 1581$ platí $y_k \neq 0$. Zo vzťahu $y_k = x_{k+1} \cdot x_k$ priamo vyplýva, že ak $y_k \neq 0$, tak potom $x_k \neq 0$ aj $x_{k+1} \neq 0$.

Zároveň sme získali, že $y_{1582} = 0$. To vieme rozpísať ako $0 = y_{1582} = x_{1583} \cdot x_{1582}$. V predchádzajúcom odseku sme vysvetlili, prečo $x_{1582} \neq 0$. Aby mohla platiť rovnosť $0 = x_{1583} \cdot x_{1582}$, tak potom nutne $x_{1583} = 0$.

Keďže sme dokázali, že pre $1 \leq k \leq 1582$ platí $x_k \neq 0$ a zároveň $x_{1583} = 0$, tak naša hľadaná najmenšia hodnota je 1583.

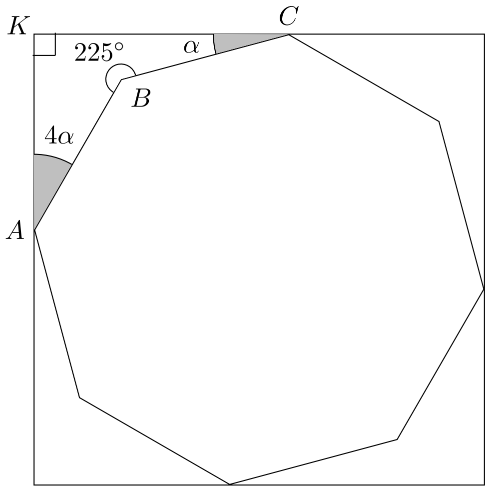
3. časť

Úloha 3.1: Na obrázku sú pravidelný osemuholník a štvorec. Aká je veľkosť uhla α?



Výsledok: 9°

Riešenie: Označme si body A, B, C, K v obrázku nasledovne:



Vieme, že veľkosť vnútorného uhla v pravidelnom osemuholníku je 135°. Preto nekonvexný uhol $\angle ABC$ má veľkosť $360° - 135° = 225°$. Keďže K je vrchol štvorca, bude $|\angle AKC| = 90°$.

Súčet vnútorných uhlov v štvoruholníku $ABCK$ musí byť 360°, preto si vieme vyjadriť alfu:

$$\begin{aligned} \alpha + 4\alpha + 225° + 90° &= 360° \\ 5\alpha &= 45° \\ \alpha &= 9° \end{aligned}$$

Úloha 3.2: Michal má v čajníku liter čaju. Čaj je horúci, a tak sa z neho konštantnou rýchlosťou vyparuje 1 deciliter za hodinu. Okrem toho každých 10 minút Michal príde a pol decilitra čaju vypije. Po koľkých minútach bude čajník prázdny?

Výsledok: 150

Riešenie: Pozrime sa, čo sa stane za 30 minút. Keďže sa čaj vyparuje konštantne, za tento čas sa vyparí pol decilitra a Michal vypije jeden a pol decilitra. Celkovo sa za 30 minút minú 2 decilitre. Potrebujeme, aby sa celkovo minul liter, to jest 10 decilitrov, čo je päťkrát viac. Vyparovanie aj pitie prebieha konštantne rýchlo, takže potrebujeme aj päťkrát viac času, a teda čajník sa vyprázdni za $5 \cdot 30 = 150$ minút.

Úloha 3.3: Štvorciferné číslo $\overline{ABCD}$ celočíselne vydelíme trojciferným číslom $\overline{ABC}$. Keď sčítame celočíselný podiel a zvyšok po delení, dostaneme druhú mocninu prirodzeného čísla. Aká je hodnota cifry D?

Zápis $\overline{ABC}$ vyjadruje číslo s ciframi A, B, C v tomto poradí.

Výsledok: 6

Riešenie: Ak by sme vynásobili číslo $\overline{ABC}$ desiatimi a pripočítali D, dostali by sme číslo $\overline{ABCD}$. Delenie je opačná operácia k násobeniu, a teda ak vydelíme číslo $\overline{ABCD}$ číslom $\overline{ABC}$, tak dostaneme čiastočný podiel 10 a zvyšok D. Zvyšok po delení D musí byť od 0 do 9, keďže D je jedna cifra, čiže v súčte s 10 to môže byť 10 až 19. Jediná druhá mocnina prirodzeného čísla v tomto intervale je 16, a teda D musí byť 6.

Úloha 3.4: Koľko kladných štvorciferných čísel má súčin všetkých nenulových cifier rovný 12?

Výsledok: 93

Riešenie: Označme hľadané číslo $\overline{abcd}$. Číslo 12 si vieme zapísať ako $2 \cdot 6$, $3 \cdot 4$ či $2 \cdot 2 \cdot 3$, kde, keďže počítame ciferné súčiny, môžeme k týmto číslam pridať jednotky a ciferný súčin sa nezmení. Medzi cifry čísla $\overline{abcd}$ môžeme pridať aj nuly, keďže podľa zadania budeme nuly pri počítaní ciferného súčinu ignorovať. Poďme zistiť, koľko rôznych čísel $\overline{abcd}$ existuje pre rôzne možnosti rozkladu čísla 12.

1. Tri rôzne nenulové cifry ($1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 6$, $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4$, $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$).

   V tomto prípade máme tri rôzne nenulové cifry, teda jedna z nich sa opakuje dvakrát. Keďže hľadáme štvorciferné čísla obsahujúce štyri cifry, každú práve raz, takých čísel vieme pre jednu z možností nájsť 4!. Potrebujeme však odstrániť možnosti, kde vzniknú identické čísla (keďže jedna z cifier sa v čísle opakuje). Potom čísel bude $4!/2 = 12$, keďže v každom nájdenom čísle by sme vedeli vzájomne vymeniť dve opakujúce sa cifry. Spolu (pre všetky tri možnosti) vieme nájsť 36 vyhovujúcich čísel.

2. Tri rôzne cifry a nula ($1 \cdot 2 \cdot 6$, $1 \cdot 3 \cdot 4$).

   V tomto prípade máme štyri rôzne cifry, tri nenulové a nulu. Opäť vieme pre jednu z možností nájsť 4! čísel, no musíme odstrániť tie, ktoré začínajú nulou, keďže nebudú štvorciferné. Tých bude 3!. Takto vieme nájsť $4! - 3! = 18$ vyhovujúcich čísel. Spolu (pre obe možnosti) ich vieme nájsť 36.

3. Dve rôzne nenulové cifry a nula ($2 \cdot 2 \cdot 3$).

   Tento prípad je podobný druhému prípadu. Opäť máme jednu nulu, teda musíme odstrániť všetky nájdené čísla, ktoré ňou začínajú. No máme aj opakujúce sa cifry. Musíme teda odstrániť aj duplicitné čísla ako v prvom prípade. Spolu tak vieme nájsť $(4! - 3!)/2 = 9$ čísel.

4. Dve rôzne nenulové cifry a dve nuly ($2 \cdot 6$, $3 \cdot 4$).

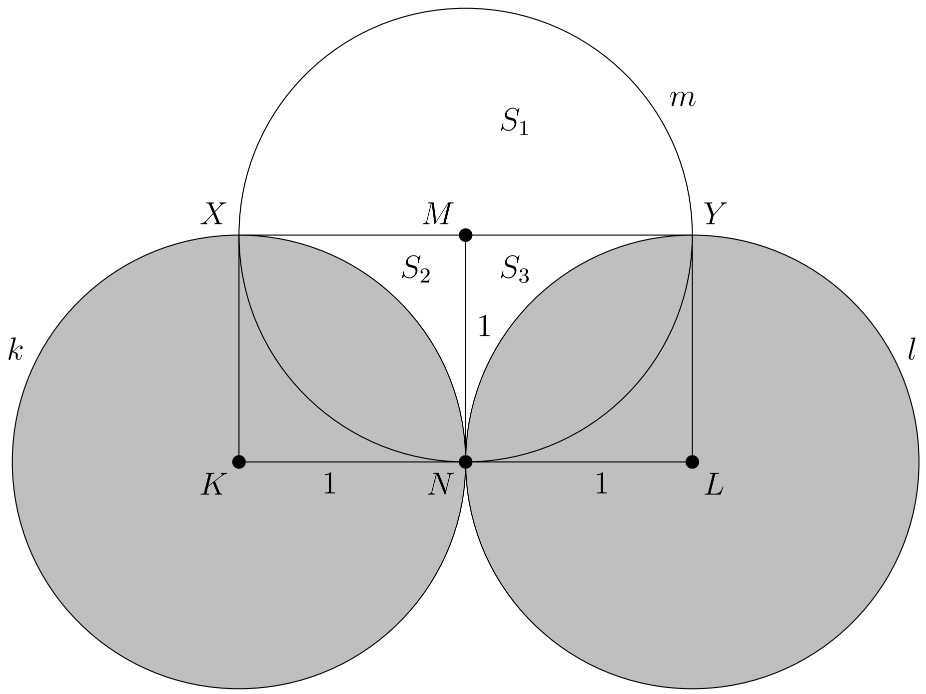
   Tento prípad je podobný prvému prípadu, no s tým rozdielom, že opakujúca sa cifra je 0. Z nájdených čísel teda budeme musieť odstrániť najprv identické čísla ako v prvom prípade a následne tie, ktoré sa začínajú nulou ako v druhom prípade. Vieme nájsť $12 - 3! = 6$ vyhovujúcich čísel, spolu (pre obidve možnosti) 12 čísel.

Existuje $36 + 36 + 9 + 12 = 93$ vyhovujúcich štvorciferných čísel.

Úloha 3.5: Dané sú tri kruhy k, l, m s polomerom 1 a stredmi K, L, M. Kruhy k a l sa dotýkajú v bode N a kruh m sa dotýka priamky KL v bode N. Vyfarbíme kruhy k a l. Aký je obsah nevyfarbenej časti kruhu m?

Výsledok: 2

Riešenie:



Načrtnime si obrázok podľa zadania a bez ujmy na všeobecnosti si zvolíme, že kruh m sa bude dotýkať úsečky KL zvrchu. Priesečník k a m rôzny od N označíme X a priesečník l a m rôzny od N označíme Y. Zo zadania má každý z kruhov k, l, m polomer 1. Preto $|KX| = |KN| = |LN| = |LY| = |MX| = |MN| = |MY| = 1$. KL je dotyčnicou kruhu m, takže je kolmá na MN, keďže N je dotykový bod. Preto $\angle KNM$ a $\angle LNM$ sú pravé uhly. Keďže $|KX| = |KN| = |MX| = |MN| = 1$ a $|\angle KNM| = 90°$, $KNMX$ je nutne štvorec. Podobne pretože $|LN| = |LY| = |MY| = |MN| = 1$ a $|\angle LNM| = 90°$, je $NLYM$ nutne štvorec.

Obsah nevyfarbenej časti kruhu m si rozdelíme na 3 časti a vypočítame ho ako súčet $S_1 + S_2 + S_3$: Keďže $|MX| = |MY| = 1$, XY je priemerom kruhu m a S_1 potom vieme vypočítať ako polovicu obsahu kruhu m, teda $S_1 = \pi \cdot r^2/2 = \pi \cdot 1^2/2 = \pi/2$. Obsah S_2 vypočítame, keď od obsahu jednotkového štvorca $KNMX$ odčítame štvrtinu obsahu kruhu k. Štvrtinu preto, lebo tento kruhový výsek NKX má stredový uhol 90°, čo je štvrtina z 360°. Dostávame $S_2 = 1 \cdot 1 - \pi \cdot r^2/4 = 1 - \pi \cdot 1^2/4 = 1 - \pi/4$. Hodnotu S_3 vypočítame analogicky, keď od obsahu jednotkového štvorca $NLYM$ odčítame štvrtinu obsahu kruhu l. Dostávame $S_3 = 1 \cdot 1 - \pi \cdot r^2/4 = 1 - \pi \cdot 1^2/4 = 1 - \pi/4$.

Obsah nevyfarbenej časti kruhu m je $S_1 + S_2 + S_3 = \pi/2 + 1 - \pi/4 + 1 - \pi/4 = 2$.

Úloha 3.6: Nájdite najmenšie kladné celé číslo n, ktoré sa rovná súčinu troch rôznych prvočísel, také, že aritmetický priemer všetkých kladných deliteľov n nie je celé číslo.

Výsledok: 130

Riešenie: Označme si tri rôzne prvočísla, ktorých súčin je n, ako p, q a r. Potom všetky kladné delitele čísla n sú 1, p, q, r, $p \cdot q$, $p \cdot r$, $q \cdot r$ a $p \cdot q \cdot r$.

Aritmetický priemer týchto deliteľov je $(1+p+q+r+p\cdot q+p\cdot r+q\cdot r+p\cdot q\cdot r)/8$. Tento aritmetický priemer nie je celé číslo, čo znamená, že súčet týchto deliteľov nie je násobok 8.

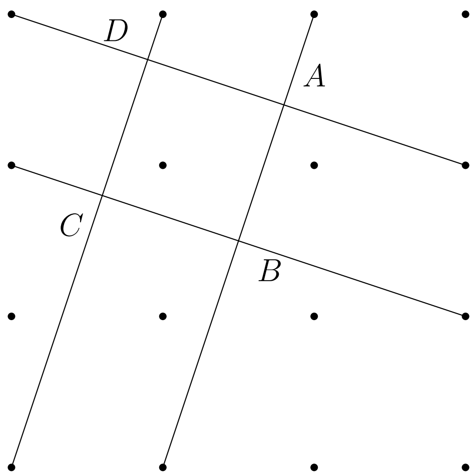
Všimnime si, že daný súčet sa dá rozložiť na súčin troch činiteľov:

$$1+p+q+r+p\cdot q+p\cdot r+q\cdot r+p\cdot q\cdot r=(1+p)\cdot(1+q)\cdot(1+r)$$

Tento súčin nie je násobok 8, preto aspoň jeden činiteľ musí byť nepárny (ak by všetky tri činitele boli párne, tak výsledný súčin by bol násobok 8). To znamená, že jedno z prvočísel musí byť 2, jediné párne prvočíslo. Zvyšné dva činitele už určite budú párne. Preto ani jeden z nich nesmie byť násobkom 4 (inak by bol výsledný súčin násobkom 8) a zvyšné dve prvočísla musia mať zvyšok 1 po delení 4. Keďže hľadáme najmenšie kladné celé číslo n, tak zvolíme dve najmenšie prvočísla so zvyškom 1 po delení 4, čo sú 5 a 13.

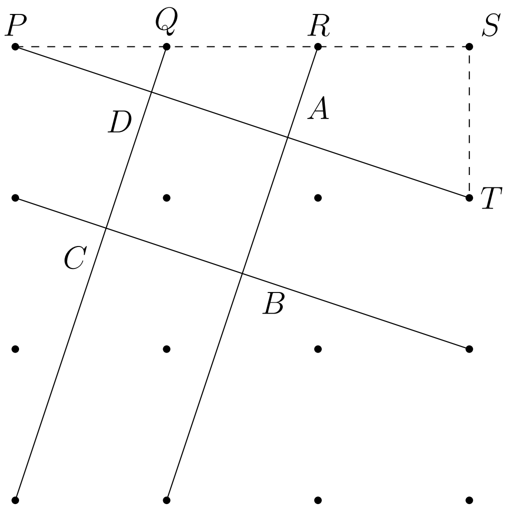
Výsledné číslo n je $2\cdot 5\cdot 13=130$.

Úloha 3.7: V mriežke majú susedné mrežové body vzdialenosť 1. Aký je obsah štvorca $ABCD$?



Výsledok: 9/10

Riešenie: Na začiatok si do nášho obrázka zo zadania doplníme body P, Q, R, S, T a úsečky medzi nimi. Pozrime sa teraz na ich dĺžky: $|PQ|=|QR|=|RS|=1$, a teda $|PS|=3$ a $|PR|=2$.



Keďže uhol PST je pravý, v trojuholníku PST z Pytagorovej vety $|PT| = \sqrt{|PS|^2 + |ST|^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$.

Podľa zadania $ABCD$ je štvorec, čiže úsečka PT je kolmá na QC aj RB. Trojuholník PDQ je potom pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole D a trojuholník PAR je pravouhlý s pravým uhlom pri A.

Keďže sú trojuholníky PDQ, PAR a PST pravouhlé a majú rovnako veľký uhol pri vrchole P, tak sú aj podobné podľa vety uu.

V trojuholníkoch PAR a PST z podobnosti vyplýva $|PA|/|PS| = |PR|/|PT|$, z čoho vieme vyjadriť dĺžku PA ako $|PA| = 3 \cdot 2/\sqrt{10}$. Obdobne vieme vyjadriť dĺžku PD z pomeru strán trojuholníkov PDQ a PST ako $|PD| = 3 \cdot 1/\sqrt{10}$.

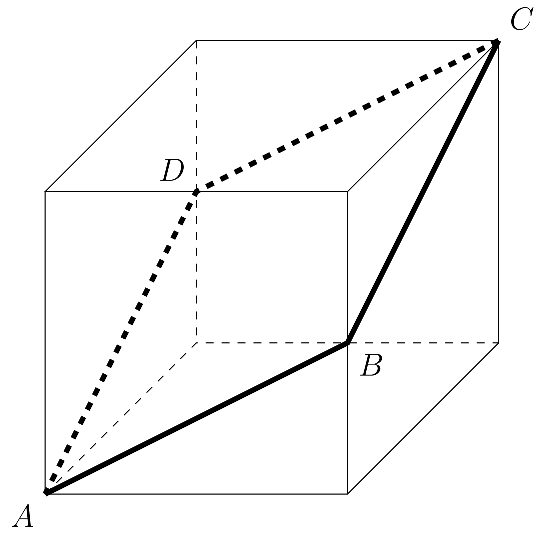
Stranu DA teraz vieme vyjadriť ako $|DA| = |PA| - |PD| = 6/\sqrt{10} - 3/\sqrt{10} = 3/\sqrt{10}$ a obsah štvorca $ABCD$ ako

$$S_{ABCD} = |DA|^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{9}{10}.$$

Úloha 3.8: Nech A, C sú dva protiľahlé vrcholy jednotkovej kocky a B, D sú stredy protiľahlých hrán neobsahujúcich vrcholy A, C. Aký je obsah štvoruholníka $ABCD$?

Výsledok: $\sqrt{6}/2$

Riešenie: Všetky strany štvoruholníka $ABCD$ majú rovnakú dĺžku. Protiľahlé strany štvoruholníka ležia na protiľahlých stenách kocky, takže sa nepretínajú. Kvôli orientácii strán, ktorá je daná zo zadania, sú dokonca rovnobežné, takže tvoria rovnobežník. Z toho vyplýva, že $ABCD$ bude kosoštvorec. Obsah kosoštvorca je rovný polovici súčinu dĺžok jeho uhlopriečok. Úsečka AC je telesová uhlopriečka kocky a úsečka BD je rovnako dlhá ako stenová uhlopriečka kocky. Keďže je naša kocka jednotková, úsečka AB má dĺžku $\sqrt{3}$ a úsečka BD má dĺžku $\sqrt{2}$. Z toho už dorátame, že obsah štvoruholníka $ABCD$ je $\sqrt{6}/2$.



Úloha 3.9: Nájdite všetky celočíselné dvojice (x, y), pre ktoré platí $6x^2 - 3xy + 7y - 23x + 26 = 0$.

Výsledok: $(2, -4)$, $(4, 6)$

Riešenie: Z rovnosti vyjadríme y:

$$\begin{aligned} 6x^2 - 3xy + 7y - 23x + 26 &= 0 \\ 6x^2 - y(3x - 7) - 23x + 26 &= 0 \\ 6x^2 - 23x + 26 &= y(3x - 7) \end{aligned}$$

Keďže x má byť celočíselné, je zaručené $3x - 7 \neq 0$:

$$\frac{6x^2 - 23x + 26}{3x - 7} = y$$

To ďalej pomocou delenia mnohočlenov vieme upraviť takto:

$$\begin{aligned} \frac{6x^2 - 23x + 21}{3x - 7} + \frac{5}{3x - 7} &= y \\ 2x - 3 + \frac{5}{3x - 7} &= y. \end{aligned}$$

Na to, aby y bolo celé číslo, musí byť ľavá strana celé číslo. Vieme, že x je celé číslo, teda aj $2x - 3$ bude celé. Preto aj člen $5/(3x - 7)$ musí byť celé číslo. To nám dáva iba 4 možnosti:

- $3x - 7 = 1$, $x = 8/3$,
- $3x - 7 = -1$, $x = 2$,
- $3x - 7 = 5$, $x = 4$,
- $3x - 7 = -5$, $x = 2/3$.

Vidíme, že sme dostali dva celočíselné výsledky. K nim už nám stačí dopočítať hodnotu y:

- $x = 2$: $y = 2 \cdot 2 - 3 + \frac{5}{3 \cdot 2 - 7} = -4$,
- $x = 4$: $y = 2 \cdot 4 - 3 + \frac{5}{3 \cdot 4 - 7} = 6$.

Úloha 3.10: Adam vloží do vreca šesť červených žetónov, Betka vloží do vreca sedem modrých žetónov a Cyprián vloží do vreca osem zelených žetónov. Potom robot vyťahuje žetóny náhodne z vreca jeden po druhom a vracia ich príslušným hráčom. Víťazom hry je prvý hráč, ktorý dostane všetky svoje žetóny späť. Nájdite pravdepodobnosť, že Betka vyhrá hru. Výsledok uveďte ako zlomok v základnom tvare.

Výsledok: 64/195

Riešenie: Vygenerujme celú postupnosť, v ktorej robot rozdáva žetóny, a pozrime sa na jej koniec. Ak je na jej konci napríklad červený žetón, Adam určite prehral, keďže existuje človek, ktorý dostal všetky žetóny pred ním.

Túto postupnosť žetónov sme generovali náhodne, nuž nespôsobuje ujmu na všeobecnosti, či ju čítame odzadu alebo odpredu. Pozrime sa teda na úlohu odzadu. Nech robot rozdáva žetóny dokým neostane iba jeden hráč bez žetónu. Tento hráč vyhral.

Pravdepodobnosť, že vyhrá Betka, je rovná súčtu pravdepodobnosti, že ako prvý prehrá (dostane žetón) Adam a ako druhý Cyprián, a pravdepodobnosti, že ako prvý prehrá Cyprián a ako druhý Adam.

Pravdepodobnosť, že ako prvý prehrá Adam je 6/21, keďže vo vreci je na začiatku 21 žetónov, z toho 6 červených. Následne pre výpočet pravdepodobnosti, že ako druhý prehrá Cyprián, nás zaujíma iba prvý žetón z tých $21 - 6 = 15$ žetónov, ktoré nie sú červené. Spomedzi nich je 8 žetónov zelených, takže pravdepodobnosť, že prvý z nich bude vytiahnutý Cypriánov, je $8/15$. Celková pravdepodobnosť, že najprv prehrá Adam a po ňom Cyprián, je teda $6/21 \cdot 8/15 = 16/105$.

Analogicky vypočítame pravdepodobnosť, že ako prvý prehrá Cyprián a ako druhý Adam. Získame $8/21 \cdot 6/13 = 16/91$.

Sčítaním týchto pravdepodobností získame pravdepodobnosť, že Betka dostane svoj žetón ako posledná: $16/105 + 16/91 = 64/195$.

Úloha 3.11: Pre (nekonečnú) postupnosť reálnych čísel $A = (a_1, a_2, a_3 \dots)$ definujme ΔA ako postupnosť $(a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots)$. Nájdite a_1 za predpokladu, že všetky prvky postupnosti $\Delta(\Delta A)$ sú 1 a $a_{19} = a_{32} = 0$.

Výsledok: 279

Riešenie: Zo zadania vyplýva, že postupnosť ΔB pre nejakú postupnosť B je postupnosť rozdielov jej susedných členov. Teda zadanie nám hovorí, že postupnosť ΔA je postupnosťou reálnych čísel, ktorých rozdiely sú 1. Je to preto nutne postupnosť tohto tvaru:

$$\Delta A = (\Delta a_1, \Delta a_1 + 1, \Delta a_1 + 2, \dots)$$

Inými slovami:

$$\Delta a_i = \Delta a_1 + i - 1$$

Zistime hodnotu Δa_1 pomocou a_{19} a a_{32}:

$$\begin{aligned}
a_{20} &= a_{19} + \Delta a_{19} \\
a_{21} &= a_{20} + \Delta a_{20} \\
a_{22} &= a_{21} + \Delta a_{21} \\
&\vdots \\
a_{31} &= a_{30} + \Delta a_{30} \\
a_{32} &= a_{31} + \Delta a_{31}
\end{aligned}$$

Postupným dosádzaním dostávame:

$$\begin{aligned}
0 = a_{32} = \Delta a_{31} + a_{31} = \Delta a_{31} + \Delta a_{30} + a_{30} = \Delta a_{31} + \Delta a_{30} + \Delta a_{29} + a_{29} = \dots \\
0 = \Delta a_{31} + \Delta a_{30} + \Delta a_{29} + \dots + \Delta a_{21} + \Delta a_{20} + \Delta a_{19} + a_{19}
\end{aligned}$$

Využijeme $\Delta a_i = \Delta a_1 + i - 1$ a $a_{19} = 0$:

$$\begin{aligned}
0 &= (\Delta a_1 + 30) + (\Delta a_1 + 29) + \dots + (\Delta a_1 + 20) + (\Delta a_1 + 19) + (\Delta a_1 + 18) + 0 \\
0 &= 13 \cdot \Delta a_1 + 30 + 29 \dots + 20 + 19 + 18 \\
0 &= 13 \cdot \Delta a_1 + 312 \\
\Delta a_1 &= -24
\end{aligned}$$

Pustíme sa do vyjadrovania a_1. Využijeme podobnú metódu dosadzovania, ale teraz si prehodíme $a_{i+1} = a_i + \Delta a_i$ na $a_i = a_{i+1} - \Delta a_i$:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_2 - \Delta a_1 \\ a_2 &= a_3 - \Delta a_2 \\ &\vdots \\ a_{18} &= a_{19} - \Delta a_{18} = -\Delta a_{18} \end{aligned}$$

Takisto ako predtým využijeme tieto rovnosti, aby sme dostali a_1:

$$a_1 = a_2 - \Delta a_1 = a_3 - \Delta a_2 - \Delta a_1 = a_4 - \Delta a_3 - \Delta a_2 - \Delta a_1 = \cdots = a_{19} - \Delta a_{18} - \ldots - \Delta a_2 - \Delta a_1$$

A opäť využijeme $\Delta a_i = \Delta a_1 + i - 1$:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 - (\Delta a_1 + 17) - (\Delta a_1 + 16) - \ldots - (\Delta a_1 + 2) - (\Delta a_1 + 1) - \Delta a_1 \\ a_1 &= -18 \cdot \Delta a_1 - (17 + 16 + \cdots + 3 + 2 + 1) \\ a_1 &= -18 \cdot (-24) - 153 = 432 - 153 = 279 \end{aligned}$$

Úloha 3.12: Na internáte sú poschodia označené číslami 1 až n a pokazený výťah. Keď vo výťahu stlačíme tlačidlo, výťah nás tam zavezie iba vtedy, ak rozdiel čísel aktuálneho poschodia a cieľového poschodia je deliteľný 2024 alebo ich súčet je deliteľný 2025. Ak nie je splnená ani jedna z týchto podmienok, výťah zostane stáť. Výťah nie je možné privolať zvonka. Koľko najmenej môže byť n, ak sa dá z každého poschodia dostať na každé iné?

Výsledok: 3036

Riešenie:

Zavedieme si pár skratiek:

- Namiesto „poschodie s číslom p" budeme hovoriť „poschodie p" a namiesto „rozdiel/súčet čísel poschodí" budeme hovoriť „rozdiel/súčet poschodí".
- Ak sa vezieme medzi poschodiami, ktoré majú rozdiel deliteľný 2024, tak sa „vezieme rozdielom".
- Podobne ak sa vezieme medzi poschodiami, ktoré majú súčet deliteľný 2025, tak sa „vezieme súčtom".

Ďalej zopár pozorovaní:

1. Ak sa vieme zaviezť z poschodia p_1 na poschodie p_2, tak sa vieme zaviezť z poschodia p_2 na poschodie p_1
2. Ak sa vieme zaviezť z poschodia p_1 na poschodie p_2 a zároveň sa vieme zaviezť z poschodia p_2 na poschodie p_3, tak sa vieme dostať z poschodia p_1 na poschodie p_3 (a vďaka 1 sa potom vieme dostať z p_3 na p_1)

Z ① a ② nám vyplýva aj nasledujúce: ak by sme zistili, že sa vieme zaviezť z poschodia p_1 do p_2, z p_2 do p_3, z p_3 do p_4, ..., z p_{n-1} do p_n (tento fenomén nazvime „reťazec“), pričom

$$p_1, p_2, \ldots, p_n \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

a zároveň

$$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} : i \neq j \implies p_i \neq p_j$$

(neformálne povedané, ak p_1 až p_n sú všetky čísla od 1 po n),

tak sa pre n poschodí dá z každého poschodia dostať na každé iné. Ak sa chceme dostať z p_i do p_j, tak si tieto dve poschodia nájdeme v našom „reťazci“ a postupne sa cez medziposchodia zavezieme do cieľa.

Samozrejme, musíme si dať pozor. Ak by sme takýto „reťazec“ pre n nenašli, tak to neznamená, že sa nutne nevieme dostať z každého z týchto n poschodí na každé iné (predsa len, také sú pravidlá implikácií). Ukáže sa ale, že toto nebudeme musieť riešiť, pretože my takýto reťazec nájdeme.

Teraz sa pustíme do dokazovania toho, že riešením je $\boxed{n = 3036}$.

To dokážeme tak, že pre $n < 3036, n \in \mathbb{N}$ sa nebudeme vedieť dostať na každé poschodie, a pre $n = 3036$ nájdeme náš „reťazec“.

Ak $1013 < n < 3036$, $n \in \mathbb{N}$, tak z poschodí 1012 a 1013 sa nevieme zaviezť na žiadne iné poschodia (na vezenie súčtom na iné poschodia potrebujeme príliš veľké čísla, najmenej 3037 alebo 3038, aby sme sa dostali na súčet 4050, na vezenie rozdielom najmenej 3036 alebo 3037), čo je v rozpore so zadaním.

A ak $n \leq 1013$, $n \in \mathbb{N}$, tak sa nevieme dostať zo žiadneho poschodia na žiadne iné.

Teraz sa pokúsime nájsť „reťazec“ poschodí pre $n = 3036$. Všimneme si nasledovné prepojenia:

- Pre poschodia $p_i \in \{2025, 2026, 2027, \ldots, 3036\}$ sa vieme rozdielom zaviezť z p_i do $p_i - 2024$ (a vďaka ① aj naopak).
- Pre poschodia $p_j \in \{1, 2, 3, \ldots, 1012\}$ sa vieme súčtom zaviezť z p_j do $2025 - p_j$.
- Pre poschodia $p_k \in \{1013, 1014, 1015, \ldots, 2024\}$ sa vieme súčtom zaviezť z p_k do $4050 - p_k$.

Nech $p \leftrightarrow q$ označuje možnosť prevozu medzi poschodiami p a q. Potom dostávame nasledovný „reťazec“:

$$\begin{aligned}
&2025 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 2024 \leftrightarrow 2026 \leftrightarrow 2 \leftrightarrow 2023 \leftrightarrow \ldots \\
&\quad \ldots \leftrightarrow p_i \leftrightarrow p_i - 2024 = p_j \leftrightarrow 2025 - p_j = p_k \leftrightarrow 4050 - p_k = p_i + 1 \leftrightarrow \ldots \\
&\quad \ldots \leftrightarrow 3036 \leftrightarrow 1012 \leftrightarrow 1013
\end{aligned}$$

Tým sme zistili, že sa vieme dostať z každého poschodia pre každé iné, čo bolo treba dokázať.

autori: Viktória Brezinová, Viliam Geffert, Bianka Gurská, Gertrúda Matej Hanusová, Miriam Horváthová, Oskar Hritz, Branislav Ječim, Peter Kovacs, Matúš Masrna, Lujza Milotová, Kristína Mišlanová, Erik Novák, Patrik Paľovčík, Ján Richnavský, Martin Šmilňák, Ľubomír Vargovčík, Štefan Vašak

recenzia a úprava: Gertrúda Matej Hanusová, Matúš Masrna

názov: **Košický Matboj – 25. 10. 2024**

vydavatelia: Univerzita Pavla Jozefa Šafárika v Košiciach, Prírodovedecká fakulta
Združenie STROM

web: `seminar.strom.sk/matboj`