

Mocnost a chordály

Pepa Tkadlec

Úvod

Za mocností bodu ke kružnici se skrývá elementární tvrzení, které však až překvapivě zjednodušuje argumenty a zprůhledňuje řešení mnohých úloh. Příklady řešitelné pomocí mocnosti jsou také v poslední době velmi populární na všech úrovních matematické olympiády (včetně té mezinárodní). Mocnost je tedy nástroj nad jiné užitečný, a proto neváhejme a pusťme se do výkladu.

Definice a základní vlastnosti

Definice. Je dán bod M a kružnice k se středem O a poloměrem r . Mocností bodu M ke kružnici k rozumíme číslo $p(M, k) = |MO|^2 - r^2$.

Nechť M je bod a $k(O; r)$ kružnice.

- (i) Číslo $p(M, k)$ je nulové právě tehdy, když bod M leží na kružnici k . Číslo $p(M, k)$ je kladné/záporné právě tehdy, když M leží vně/uvnitř kružnice k .
- (ii) Buď N další bod. Je-li $p(M, k) = p(N, k)$, pak $|MO| = |NO|$.
- (iii) Pokud M leží vně k , označme T ten bod kružnice k , pro který je přímka MT ke kružnici k tečnou. Pak platí $p(M, k) = |MT|^2$.
- (iv) (zásadní!) Nechť přímka p vedená bodem M protne k v bodech A, B . Pak $MA \cdot MB = p(M, k)$, kde úsečky MA, MB nahlížíme jako orientované.

Tvrzení. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník a $Q = AD \cap BC$. Pak $ABCD$ je tětivový právě tehdy, když $|QA| \cdot |QD| = |QB| \cdot |QC|$.

Definice. Nechť k, l jsou kružnice. Množinu bodů X splňujících $p(X, k) = p(X, l)$ nazýváme chordálou kružnic k, l .

Tvrzení. Chordálou dvou nesoustředných kružnic je přímka kolmá na spojnici jejich středů.

Poznámka. Obecněji: Přímka kolmá na spojnici středů kružnic k, l je množina těch bodů X , pro něž je rozdíl $p(X, k) - p(X, l)$ roven dané konstantě.

Definice. Bodu, který má stejnou mocnost ke třem daným kružnicím, říkáme potenční střed.

Poznámka. Mocnost se neobyčejně skvěle kombinuje s úsekovými úhly a velmi dobře s Cëvovou a Menelaovou větou nebo s kruhovou inverzí.

Běžné konfigurace

Následující tři situace se v úlohách vyskytují tak často, že si zaslouží oproti všem ostatním zvýraznit. Buďte ve střehu a vždy, když na podobné rozestavení bodů narazíte, vzpomeňte si na mocnost.

Příklad. Nechť přímka p vedená bodem M protne kružnici k v bodech A, B . Buď T libovolný bod na k . Pak přímka MT je tečnou k právě tehdy, když $|\sphericalangle MAT| = |\sphericalangle MTB|$.

Příklad. Kružnice k, l se středy K, L se protínají v bodech A, B . Přímka AB protne společnou tečnu kružnic k, l , která se jich dotýká v bodech T, U , v bodě P . Pak $|PT| = |PU|$.

Příklad. Kružnice k, l se protínají v bodech X, Y . Bodem M vedeme přímky p resp. q , které protnou kružnice k resp. l v bodech A, B resp. C, D . Pak body A, B, C, D leží na jedné kružnici právě tehdy, když $M \in XY$.

Dost už bylo úvodu, vrhněme se na příklady. Jsou řazeny zhruba dle obtížnosti, ale tato je vždy relativní, tak se neboj řešit příklady i na přeskáčku.

Lehké příklady

Příklad 1. Na prodloužení tětivy KL kružnice k se středem O leží bod A . Tečny z bodu A ke kružnici k se jí dotýkají v bodech T, U . Označme M střed úsečky TU . Ukažte, že čtyřúhelník $KLMO$ je tětivový.

Příklad 2. Nechť $ABCD$ je čtyřúhelník vepsaný do kružnice k takový, že přímky AD a BC se protínají v bodě Q . Označme M průsečík přímky BD a rovnoběžky s přímkou AC vedenou bodem Q . Zvolme $T \in k$ tak, aby MT byla tečnou kružnice k . Dokažte, že $|MT| = |MQ|$. (PraSe 2005)

Příklad 3. Na stranách AB, AC ostroúhlého trojúhelníka ABC leží body K, L . Ukažte, že společná tětiva kružnic nad průměry CK, BL prochází ortocentrem H trojúhelníka ABC .

Příklad 4. Mějme pravoúhlý trojúhelník ABC s přeponou AB . Na jeho odvěsně AC zvolme bod D . Nyní sestrojme kružnici k_1 , která se dotýká AB v bodě A a prochází bodem D . Dále též kružnici k_2 , která se dotýká AB v bodě B a též prochází bodem D . Označme E druhý průsečík kružnic k_1 a k_2 . Dokažte, že úhly BAC a DEC jsou shodné.

Příklad 5. Na kružnici m jsou dány body K, L tak, že KL není průměr. Uvažme všechny dvojice kružnic k, l ležících uvnitř m , které se m dotýkají v bodech K, L a samy se protínají v bodech X, Y . Ukažte, že přímka XY prochází pevným bodem.

Příklad 6. Označme H ortocentrum ostroúhlého trojúhelníka ABC . Kružnice k_a se středem ve středu strany BC procházející bodem H protíná stranu BC v bodech A_1, A_2 . Body B_1, B_2, C_1, C_2 definujeme podobně. Ukažte, že body $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ leží na jedné kružnici. (IMO 2008, P1)

Příklad 7. Je dána kružnice k , bod O , který na ní neleží, a přímka p , která ji neprotíná. Uvažujme libovolnou kružnici l , která má vnější dotyk s kružnicí k a dotýká se i přímky p . Příslušné body dotyku označme A a B . Pokud body O, A, B neleží v přímce, sestrojíme kružnici m opsanou trojúhelníku OAB . Dokažte, že všechny takové kružnice procházejí společným bodem různým od bodu O , anebo se dotýkají téže přímky. (MO 57–A–I–5)

Příklad 8. Na přímce p leží body A, B, C, D v tomto pořadí. Kružnice nad průměry AC, BD se protnou v X, Y . Na přímce XY zvolíme bod P ($P \notin BC$). Přímka CP protne kružnici nad AC podruhé v bodě M , přímka BP kružnici nad BD v bodě N . Ukažte, že přímky AM, DN, XY procházejí jedním bodem. (IMO 1995, P1)

Příklad 9. Trojúhelník ABC je vepsaný do kružnice k . Tečna ke k vedená bodem C protne přímku AB v bodě P . Označme M střed CP . Přímka MB protne kružnici k podruhé v bodě Q . Přímka PQ protne k podruhé v bodě R . Dokažte, že trojúhelník ARC je rovnoramenný. (Alex Zhai)

Středně obtížné příklady

Příklad 10. Označme AD, BE, CF výšky trojúhelníka ABC . Přímky EF, FD, DE protnou přímky BC, CA, AB po řadě v bodech L, M, N . Ukažte, že body L, M, N leží v přímce. Bonus: Na co je tato přímka kolmá?

Příklad 11. Nechť $ABCD$ je tětiový čtyřúhelník vepsaný do kružnice se středem O . Nechť P je jeho průsečík úhlopříček, $Q = AD \cap BC$ a $R = AB \cap CD$. Označme S druhý průsečík kružnic opsaných trojúhelníkům ABP a CDP . Ukažte, že body R, P, S leží v přímce. Dále ukažte, že i body Q, S, O leží v přímce.

Příklad 12. Označme O střed kružnice opsané trojúhelníku ABC . Body P, Q leží na stranách AC, AB . Označme K, L, M středy úseček BP, CQ, PQ . Předpokládejme, že kružnice opsaná trojúhelníku KLM se dotýká přímky PQ . Dokažte, že $|OP| = |OQ|$. (IMO 2009, P2)

Příklad 13. Nechť ABC je trojúhelník. Kružnice procházející body B, C podruhé protíná strany AB, AC v bodech C', B' . Ukažte, že přímky BB', CC', HH' procházejí jedním bodem, kde H, H' jsou ortocentra trojúhelníků $ABC, AB'C'$. (ISL 1995, G7)

Příklad 14. Nechť ABC je trojúhelník s ostrým úhlem u vrcholu A a označme M střed strany BC . Na AM zvolme bod D a zkonstruujeme kružnice k, l procházející bodem D , které se dotýkají přímky BC po řadě v bodech B, C . Přímka AB resp. AC protne kružnici k resp. l podruhé v bodě P resp. Q . Ukažte, že tečna ke kružnici k vedená bodem P a tečna ke kružnici l vedená bodem Q se protínají na AM . (Vietnam TST 2010)

Příklad 15. Tečny ke kružnici k se středem O v bodech A, B se protnou v bodě P . Na kratším oblouku AB zvolíme bod C (různý od středu). Označme $D = AC \cap PB$ a $E = BC \cap AP$. Dokažte, že středy kružnic opsaných trojúhelníkům ACE, BCD a PCO leží v přímce. (ARO 2010)

Příklad 16. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran BC, CA, AB v bodech D, E, F . Bod X leží uvnitř trojúhelníka ABC tak, že kružnice vepsaná trojúhelníku BCX se dotýká BC v D a stran CX, XB po řadě v Y, Z . Ukažte, že body E, F, Y, Z leží na kružnici.

Příklad 17. (Brianchon theorem) Předpokládejme, že šestiúhelníku $ABCDEF$ se dá vepsat kružnice. Ukažte, že přímky AD, BE, CF procházejí jedním bodem.

Triky

Mocnost bodu ke kružnici použitá vtipně a ve správný okamžik často velmi rychle vyřeší jinak nepříjemnou úlohu. Někdy si vystačíme s mocností samotnou, jindy je potřeba ji vhodně zkombinovat například s Viětovými vztahy. Obzvláště fikaným trikem je pak chápání bodu jako kružnice s nulovým poloměrem.

Příklad 18. Je dána kružnice k a bod A různý od jejího středu. Určete množinu středů kružnic opsaných všem trojúhelníkům ABC , jejichž strana BC je průměrem kružnice k . (MO 56–A–I–5)

Příklad 19. Uvažujme ty paraboly určené rovnicí $x^2 + px + q = 0, p, q \in \mathbb{R}$, které protínají osy x, y ve třech různých bodech. Ke každé trojici průsečíků uvažme kružnici, která jimi prochází. Dokažte, že všechny takové kružnice procházejí jedním bodem. (Španělsko 1997)

Příklad 20. Je dán trojúhelník ABC a I, O středy jeho vepsané a opsané kružnice. Označme A' průsečík přímky BC a kolmice na AI vedené bodem I . Body B', C' jsou definované podobně. Ukažte, že body A', B', C' leží v přímce, která je kolmá na OI .

Příklad 21. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká jeho stran AB, BC, CA v bodech F, D, E . Označme písmeny Y_1, Y_2, Z_1, Z_2, M středy úseček FB, BD, DC, CE, BC . Konečně buď $X = Y_1Y_2 \cap Z_1Z_2$. Dokažte, že $XM \perp BC$. (Alex Anderson)

Příklad 22. Kružnice k, l mají vnější dotyk v bodě T . Bod A probíhá kružnicí l . Na kružnici k najdeme body B, C , aby AB, AC byly tečny kružnice k . Přímký BT, CT protnou kružnici l podruhé v bodech D, E . Najděte množinu průsečíků přímkou DE a tečen ke kružnici l v bodě A . (KMS 2009/10, 13)

Příklad 23. Kružnice vepsaná trojúhelníku ABC se dotýká stran AC, BC v bodech E, D . Průsečík $AD \cap BE$ označme G . Zkonstruuje body U, V , aby $ABUE$ a $ABDV$ byly rovnoběžníky. Dokažte, že $|GU| = |GV|$. (ISL 2009, G3)

Literatura a zdroje

Čerpal jsem převážně z archivů mezinárodní matematické olympiády stejně jako z národních olympiád, korespondenčních seminářů (PraSe a KMS) a z příspěvku *Alči Skálové*, jíž tímto děkuji.

Hinty

Běžné konfigurace

Hint. Úsekový úhel.

Hint. Bod P má k oběma kružnicím stejnou mocnost. Mocnost se dá měřit po tečnách.

Hint. Oboje je ekvivalentní $|MA| \cdot |MB| = |MC| \cdot |MD|$.

Lehké příklady

Hint 1. Měřte z bodu A . Vzpomeňte na Euklidovu větu o odvěsně (nebo jen odhalte podobné trojúhelníky).

Hint 2. Dokažte podobnost MDQ a MQB pomocí uu a pomocí mocnosti vyvoďte $|MT|^2 = |MQ|^2$.

Hint 3. Ukažte, že H má stejnou mocnost k oběma zadaným kružnicím. Použijte při tom, že BCB_0C_0 je tětiový (B_0, C_0 značí paty výšek).

Hint 4. Uvědomte si, že DE protne AB v jejím středu M . Pak ukažte, že $AMCE$ je tětiový.

Hint 5. Průsečík P tečen k m v bodech K a L má ke kružnicím k, l stejnou mocnost $|PK|^2 = |PL|^2$, tedy leží na jejich chordále.

Hint 6. Když je AB vodorovná, musí být spojnice druhého průsečíku $k_a \cap k_b$ a H svislá, takže C leží na chordále k_a, k_b . Pozorně dokončete.

Hint 7. Přímký AB protínají k podruhé v pevném bodě. Z něj měřte mocnost.

Hint 8. Stačí ukázat, že $ADNM$ je tětiový. To vyúhlete s využitím toho, že $BCNM$ je tětiový.

Hint 9. Dokreslete B' , aby $BPB'C$ byl rovnoběžník. Pak $QPB'C$ je tětiový. Zbytek doúhlete.

Středně obtížné příklady

Hint 10. Body L, M, N mají stejnou mocnost ke kružnicím opsaným trojúhelníkům ABC a DEF . Bonus: Na přímku O, T, H .

Hint 11. Bod R je potenční střed tří kružnic, takže R, P, S máme. Vyúhlete tětiové čtyřúhelníky $BCSO$ a $AOCD$ a podobně odvoďte i Q, S, O .

Hint 12. Pomocí úsekových úhlů ukažte podobnost KLM a APQ . Následně ověřte, že body P, Q mají stejnou mocnost ke kružnici opsané trojúhelníku ABC .

Hint 13. Ukažte, že body H, H' a $BB' \cap CC'$ mají všechny stejnou mocnost ke kružnicím nad průměry BB', CC' .

Hint 14. Těžnice je chordála k a l , takže $BCQP$ je tětiový (mocnost z A). Hledaný průsečík označte X a dokažte, že trojúhelník PXQ je rovnoramenný (u P, Q znáte úhly).

Hint 15. Spočítejte, že kružnice opsané BCD a $AOBP$ se dotýkají. Dokreslete průsečík tečen k $AOBP$ v A resp. B a ukažte, že je to potenční střed všech tří zadaných kružnic. Vyvoďte, že tyto mají i druhý společný průsečík různý od C .

Hint 16. Srovnáním Menelaovy a Cèvovy věty pro ABC a EF resp. XBC a YZ ukažte, že EF a YZ protínají BC v témže bodě. Z něj měřte mocnost.

Hint 17. Dokreslete tři kružnice tak, aby se každá dotýkala jedné dvojice přímek z nabídky AB a DE , BC a EF , CD a FA , a navíc aby přímky AD, BE, CF byly chordálami vždy dvou z těchto tří kružnic. Takové kružnice kupodivu lze sestavit pro libovolný tečnový šestiúhelník $ABCDEF$.

Triky

Hint 18. Kružnice opsaná trojúhelníku ABC protíná přímku AO podruhé v pevném bodě (mocnost středu k).

Hint 19. Viètovy vztahy. Pozor na 2 případy.

Hint 20. Dokažte, že rozdíl mocností bodu A' k opsané a vepsané kružnici trojúhelníku ABC je r^2 (r je poloměr vepsané), čili konstanta. Může se hodit vědět, že střed oblouku BC je střed kružnice opsané trojúhelníku BIC .

Hint 21. Interpretujte přímky Y_1Y_2 resp. Z_1Z_2 jako chordály kružnice vepsané a bodů B resp. C .

Hint 22. Je to chordála (společná vnitřní tečna) k a l . Tečnu k v A chápejte jako chordálu l a A , zbývá ukázat, že DE je chordála k a A , tj. že $|DA|^2 = |DT| \cdot |DB|$ (a obdobně pro E), což je podobnost nějakých dvou trojúhelníků. Přeneste vhodný úhel pomocí stejnolehlosti.

Hint 23. Dokreslete kružnici připsanou ABC vzhledem k A . Vhodně popřenešete délky úseků z vrcholů k bodům dotyku. Vyjde, že přímka AD je chordála připsané a bodu V a BE je chordála připsané a bodu U . Tedy G leží na chordále U a V , což jsme přesně chtěli.